V. A. KISELIOV

MECANICA de CONSTRUCCION

tomo

I

Editorial Mir

Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

В. А. КИСЕЛЕВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

СТРОЙИЗДАТ
Москва

V. A. KISELIOV

MECANICA
DE
CONSTRUCCION

TOMO I

Editorial Mir . Moscú

CDU 624.0,4(075.8)=60

Traducido del ruso por el ingeniero JULIO JUAN MANUEL

на испанском языке 1972

Impreso en la URSS
Derechos reservados

INDICE

CAPITULO I * INTRODUCCION 11

§ 1. La disciplina mecánica de construcción 11
§ 2. Nociones sobre los métodos para calcular estructuras 15
§ 3. Cargas 19
§ 4. Esquema teórico o de cálculo de una estructura 20
§ 5. Sistemas invariantes, variantes y de variabilidad instantánea 22
§ 6. Sistemas estáticamente determinados (isostáticos) y estáticamente indeterminados (hiperestáticos) 25
§ 7. Principio de independencia de acción de las fuerzas externas 27

CAPITULO II * FORMACION Y PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS PLANOS 29

§ 8. Grados de libertad y variabilidad de los sistemas 29
§ 9. Vínculos y sistemas simples 30
§ 10. Fijación de sistemas a tierra 34
§ 11. Vínculos indispensables, superfluos y ficticios 35
§ 12. Reacciones de los vínculos debidas a las cargas 36
§ 13. Reacción de los vínculos en los sistemas de variabilidad casi instantánea 40
§ 14. Relaciones cuantitativas entre discos y vínculos 40
§ 15. Análisis cinemático de los sistemas 43
§ 16. Clasificación de los sistemas planos 46
§ 17. Algunas propiedades de los sistemas mixtos 48

CALCULO DE SISTEMAS ESTATICAMENTE DETERMINADOS

CAPITULO III * METODOS PRINCIPALES DE CALCULO DE SISTEMAS INVARIANTES PLANOS, ESTATICAMENTE DETERMINADOS CON CARGA FIJA 50

§ 18. Consideraciones generales 50
§ 19. Método estático de determinación de las reacciones de los vínculos 51
§ 20. Método de sustitución de vínculos 56
§ 21. Método cinemático de determinación de las reacciones de los vínculos 58
§ 22. Momentos flectores, fuerzas longitudinales y transversales en la sección de una barra 64

CAPITULO IV * CRITERIOS DE VARIABILIDAD DE LOS SISTEMAS PLANOS COMPLEJOS CON SUFICIENTE NUMERO DE VINCULOS 66

§ 23. Criterios estáticos de variabilidad 66
§ 24. El criterio de invariabilidad por el método de sustitución de vínculos 70
§ 25. Los signos cinemáticos de variabilidad 72

CAPITULO V * METODOS PRINCIPALES DE CALCULO DE SISTEMAS PLANOS ESTATICAMENTE DETERMINADOS CON CARGA RODANTE 75

§ 26. Noción sobre carga rodante 75
§ 27. Métodos para determinar la posición de cálculo o teórica de una carga rodante 77
§ 28. Sobre la forma de las líneas de influencia 81
§ 29. Método estático de construcción de líneas de influencia 82
§ 30. Construcción de líneas de influencia por el método de sustitución de vínculos 84
§ 31. Método cinemático de construcción de líneas de influencia 86
§ 32. Líneas de influencia en el caso de transmisión nodal de la carga 93
§ 33. La función de influencia y sus primeras derivadas parciales 94
§ 34. Determinación de las magnitudes analizadas, debidas a cargas de distintos tipos, por las líneas de influencia 95
§ 35. Propiedad de la parte recta de la línea de influencia 96
§ 36. Construcción del gráfico de variación de la magnitud estudiada, empleando la línea de influencia 97
§ 37. Determinación de la posición de cálculo de una carga rodante por las líneas de influencia continuas 99
§ 38. Determinación de la posición de cálculo de una carga rodante por ciertas líneas de influencia discontinuas 107
§ 39. Determinación de la posición de cálculo de una carga rodante, uniformemente repartida por cualquier línea de influencia unívoca 109
§ 40. Noción sobre carga equivalente 110
§ 41. Matrices de influencia 111

CAPITULO VI * CALCULO DE VIGAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS Y DE PORTICOS PLANOS 113

§ 42. Tipos de vigas 113
§ 43. Método estático de construcción de las líneas de influencia de las reacciones de apoyo, de los momentos flectores y de las fuerzas transversales en las vigas simplemente apoyadas y cantilever 114
§ 44. Método cinemático de construcción de las líneas de influencia de las reacciones de apoyo, de los momentos flectores y de las fuerzas transversales en vigas simplemente apoyadas y voladizas 118

§ **45.** Diagramas envolventes de los momentos flectores y de las fuerzas transversales en una viga simplemente apoyada, debidos a una carga rodante 120
§ **46.** Diagramas envolventes de los momentos flectores y fuerzas transversales debidas a una carga rodante, en una viga con doble voladizo 132
§ **47.** Diagrama de los momentos flectores y las fuerzas transversales en las vigas articuladas 133
§ **48.** Método estático de construcción de las líneas de influencia de las reacciones de los apoyos, de los momentos flectores y de las fuerzas transversales en las vigas articuladas 134
§ **49.** Método cinemático de construcción de las líneas de influencia de las reacciones de apoyo, de los momentos flectores y de las fuerzas transversales en las vigas articuladas 137
§ **50.** Cálculo de pórticos 138
§ **51.** Matriz de influencia de los momentos flectores 140

CAPITULO VII * CALCULO DE LAS ARMADURAS DE VIGA O VIGAS ARMADAS ARTICULADAS, ESTATICAMENTE DETERMINADAS 140
§ **52.** Tipos de vigas armadas 140
§ **53.** Método estático de determinación de las fuerzas axiles (esfuerzos), debidas a las cargas fijas, en las barras de las armaduras 141
§ **54.** Algunas reglas que se desprenden del equilibrio de los nudos 147
§ **55.** Método estático de determinación de las fuerzas axiles, debidas a la carga fija, en las barras de las armaduras con elementos complejos 148
§ **56.** Determinación de las fuerzas axiles en las barras de las armaduras, debidas a carga fija, por el método de sustitución de vínculos 151
§ **57.** Análisis de las fuerzas axiles, en las barras de algunas armaduras de viga simples, con carga vertical 152
§ **58.** Método estático de construcción de las líneas de influencia de las reacciones de apoyo y las fuerzas axiles en las barras de las armaduras de viga con celosía simple 157
§ **59.** Construcción de las líneas de influencia de las reacciones de apoyo y de las fuerzas axiles en las barras de las armaduras, por el método de sustitución de vínculos 165
§ **60.** Método cinemático de construcción de las líneas de influencia de las reacciones de apoyo y de las fuerzas axiles de las barras de las armaduras 168
§ **61.** Noción sobre armaduras arriostradas 172
§ **62.** Método estático de construcción de las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras de armaduras arriostradas 175
§ **63.** Construcción de las líneas de influencia de las reacciones de los apoyos y de las fuerzas axiles en las barras de las armaduras de dos apoyos con presión horizontal 185

CAPITULO VIII * CALCULO DE SISTEMAS TRIARTICULADOS 186
§ 64. Tipos de sistemas triarticulados 186
§ 65. Cálculo analítico de sistemas triarticulados bajo carga fija, por el método estático 188
§ 66. Cálculo gráfico de los sistemas triarticulados bajo carga fija por el método estático 191
§ 67. Polígono y curva de presiones en el arco 196
§ 68. Eje racional del arco triarticulado 197
§ 69. Eje racional del arco triarticulado con carga vertical que no depende de su configuración 198
§ 70. Eje racional del arco triarticulado con carga vertical dependiente de su configuración 199
§ 71. Determinación del eje racional del arco triarticulado por el procedimiento de aproximaciones sucesivas 202
§ 72. Eje racional del arco triarticulado bajo carga radial 204
§ 73. Método estático de construcción de las líneas de influencia de las reacciones de apoyo en el arco triarticulado 205
§ 74. Método estático de construcción de las líneas de influencia de los momentos flectores, las fuerzas axiles y las fuerzas transversales en el arco triarticulado 206
§ 75. Método cinemático de construcción de las líneas de influencia de los momentos flectores, las fuerzas axiles y las fuerzas transversales en el arco triarticulado 211
§ 76. Línea de influencia de las tensiones de borde y de los momentos nucleares 214
§ 77. Método estático de construcción de las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras de las armaduras en arco 217
§ 78. Método cinemático de construcción de las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras de las armaduras en arco 222
§ 79. Líneas de influencia de las reacciones de apoyo y de las fuerzas (internas) sustituyentes en los arcos y en las armaduras en arco con consolas 223
§ 80. Líneas de influencia de las reacciones de apoyo y de las fuerzas sustituyentes (internas) en los sistemas colgantes 224
§ 81. Cálculo de armaduras de cable 226

CAPITULO IX * CALCULO DE SISTEMAS MIXTOS PLANOS ESTATICAMENTE DETERMINADOS 230
§ 82. Sistemas mixtos 230
§ 83. Líneas de influencia de las reacciones de apoyo y de las fuerzas sustituyentes (internas) en los sistemas mixtos colgantes 231
§ 84. Líneas de influencia de las reacciones de apoyo y de las fuerzas sustituyentes (internas) en los sistemas mixtos en arco 237

CAPITULO X * CARGAS LIMITES DE LOS SISTEMAS ISOSTATICOS PLANOS 239

§ 85. Fuerzas internas límites en la sección de la barra 239
§ 86. Ecuaciones para las fuerzas sustituyentes límites (internas) en la sección 241
§ 87. Estados límites de los sistemas por la capacidad portante 246
§ 88. Cargas límites para las vigas 248
§ 89. Cargas límites para pórticos y arcos 251
§ 90. Cargas límites para las armaduras 253
§ 91. Deformaciones y tensiones remanentes en los sistemas de materiales plásticos después de reducir la carga 254
§ 92. Cargas límites en el caso de repetición de su aplicación 258

CAPITULO XI * DESPLAZAMIENTOS DE LOS SISTEMAS DE BARRAS PLANOS 259

§ 93. Nociones generales 259
§ 94. Trabajo de las fuerzas externas e internas 261
§ 95. Fuerzas generalizadas y desplazamientos generalizados 261
§ 96. Trabajo efectivo de las fuerzas externas e internas 263
§ 97. Trabajo posible de las fuerzas externas e internas 269
§ 98. Aplicación del principio de los desplazamientos posibles a los sistemas elásticos de barras 272
§ 99. Fórmula general del trabajo posible 273
§ 100. Teoremas de reciprocidad 275
§ 101. Fórmula general de los desplazamientos 278
§ 102. Cálculo de las integrales en la fórmula de los desplazamientos cuando uno de los integrandos es una función lineal 285
§ 103. Cálculo aproximado de las integrales que componen la fórmula de los desplazamientos 288
§ 104. Forma matriz de cálculo de los desplazamientos 289
§ 105. Determinación de los desplazamientos por medio de la energía potencial 294
§ 106. Utilización de la simetría del sistema 296
§ 107. Líneas de influencia de los desplazamientos 298
§ 108. Construcción del diagrama nodal de los desplazamientos como diagrama de los momentos flectores debidos a una carga convencional 299
§ 109. Matriz de los pesos elásticos y su empleo 309
§ 110. Noción sobre la determinación de los desplazamientos en la fase elasticoplástica 317

CAPITULO XII * FORMACION Y CALCULO DE LOS SISTEMAS ESPACIALES 319

§ 111. Vínculos, uniones simples y fijaciones de los sistemas a tierra 319
§ 112. Relaciones entre el número de cuerpos y el número de vínculos 324

§ 113. Armaduras espaciales articuladas 325
§ 114. Determinación de las reacciones de apoyo 326
§ 115. Determinación de las reacciones de los vínculos en el caso de carga fija 328
§ 116. Calculo de las armaduras espaciales por su descomposición en planas 330
§ 117. Variabilidad instantánea de los sistemas espaciales 331
§ 118. Desplazamientos de los sistemas espaciales 331

CAPITULO I * INTRODUCCION

§ 1. LA DISCIPLINA MECANICA DE CONSTRUCCION. La mecánica de construcción es la ciencia que trata del cálculo de la resistencia mecánica, estabilidad y rigidez de las estructuras.

El cálculo de la resistencia mecánica de las estructuras asegura su resistencia a las cargas efectivas.

El cálculo de la estabilidad revela la capacidad de las estructuras de conservar las posiciones dadas y las formas de equilibrio adquiridas en estado deformado.

El cálculo de la rigidez tiene por objeto proteger las estructuras contra grandes vibraciones y desplazamientos, que impiden la explotación normal de las mismas.

A diferencia de la resistencia de materiales, que se ocupa fundamentalmente del estudio de la resistencia mecánica de los materiales de construcción y del cálculo de la resistencia mecánica, de la estabilidad y de la rigidez de elementos individuales, la mecánica de construcción examina las estructuras en forma integral y elabora los métodos para calcularlas. Mientras que en la resistencia de materiales son objeto de examen y estudio, preferentemente, elementos estructurales aislados, en la mecánica de construcción el objeto de estudio es la estructura en su conjunto, compuesta por aquéllos. Tal es la diferencia principal entre una y otra disciplina. No obstante, es difícil delimitar rigurosamente ambas ciencias, por cuanto muchos problemas confines pueden ser referidos a cualquiera de ellas.

La mecánica de construcción, al ocuparse de las estructuras en su conjunto, estudia también cómo unir correctamente sus elementos, de lo cual depende la capacidad de las estructuras de recibir las cargas.

Esta ciencia se ocupa, además, de la determinación de las formas estructurales teóricamente racionales, que demanden el menor consumo de material.

En su desarrollo y formulaciones teóricas, la mecánica de construcción emplea las matemáticas, la física, la mecánica teórica

y la resistencia de materiales, así como los resultados de largas observaciones de las obras, calculadas por sus métodos. Por otro lado, esta ciencia da la preparación necesaria para estudiar cursos de construcciones de ingeniería, puentes y caminos.

La proyección, edificación y reconstrucción de cualquier obra de ingeniería, así como su verificación a las cargas imprevistas, están ligadas con el cálculo de la resistencia mecánica, estabilidad y rigidez de las estructuras. Por eso, para el ingeniero constructor (proyectista y maestro de obras), es extraordinariamente grande la significación de la mecánica de construcción.

Esta ciencia pertrecha al ingeniero proyectista de tales conocimientos, que le ayudan a poner al descubierto las fuerzas internas actuantes en una estructura y, por consiguiente, a hallar las formas racionales para ésta y sus elementos y a plasmar sus ideas creadoras del modo más completo y adecuado. Además, todo esto lo puede hacer antes de comenzar la construcción de la obra, modificando durante el proceso de proyección y cálculo aquello que resulte poco sólido o irracional. De esta manera, la mecánica de construcción permite al ingeniero proyectar a conciencia, crear con certeza y utilidad estructuras livianas y atrevidas, pero seguras.

La mecánica de construcción da al maestro de obras la posibilidad de comprender correctamente cómo trabaja una estructura cargada, de eliminar a tiempo los errores de la obra, que podrían reflejarse perjudicialmente en el trabajo de la misma durante su explotación, de fijar correctamente las dimensiones de los andamios y otros accesorios o de sustituir unos elementos por otros de igual resistencia mecánica. Cabe señalar, que hoy, durante la construcción de grandes obras de ingeniería, los propios andamios y accesorios forman estructuras peculiares, complicadas e importantes. En algunos casos, la mecánica de construcción le permite al maestro de obras fundamentar teóricamente los métodos de construcción de las obras de ingeniería.

La mecánica de construcción, como ciencia aplicada, surgió por necesidad de la práctica constructiva y se desarrolla junto con ella. Extrayendo sus ideas básicas de la práctica, ésta elabora métodos para calcular obras de ingeniería, creando condiciones favorables para un más amplio desarrollo y perfeccionamiento de los mismos. Así, la teoría y la práctica se enriquecen y desarrollan mutuamente.

La mecánica de construcción adquirió un desarrollo extraordinariamente grande en la URSS, donde se llevan a cabo las más diversas y complejas obras de ingeniería, jamás vistas en la historia de la humanidad. En la Unión Soviética se han creado institutos de investigación científica especiales, que se ocupan de los problemas de esta ciencia; también se realiza un gran trabajo científico en los establecimientos de enseñanza superior y en otras organizaciones científicas.

La mecánica de construcción dispone hoy día de numerosos métodos de cálculo seguros, verificados experimentalmente y en la prác-

tica de la ingeniería de construcción. Sin embargo, no se debe pensar que el desarrollo de esta ciencia ya ha terminado y que ella puede dar respuestas exactas a todos los interrogantes, sin excepción, que plantea la proyección de las obras ingenieriles. Así, como cualquier otra ciencia, la mecánica de construcción se desarrolla y perfecciona cotidianamente en concordancia con las demandas de la industria constructora en rápido crecimiento.

Pero siempre se debe tener en cuenta, que sólo merecen confianza los métodos de la mecánica de construcción confirmados por los análisis experimentales en modelos y construcciones. Por esta razón, el ensayo tiene una importancia esencial en el desarrollo de la mecánica de construcción, cuando se crean nuevos métodos de cálculo. El ensayo se realiza antes o después de fundada una nueva teoría y, a veces, antes y después. En el primer caso, el objeto de la experimentación es revelar lo fundamental dentro del fenómeno que se estudia y separarlo de lo secundario, que se puede despreciar, simplificando de este modo la teoría de cálculo que se crea. En el segundo caso, el objeto del experimento después de creada la teoría es verificar los resultados dados por ella.

Los estudios experimentales se realizan, primeramente, sobre modelos y, luego, en la realidad, sobre construcciones terminadas. En ambos casos, se miden las deformaciones y desplazamientos adquiridos y se confrontan con los datos de los cálculos teóricos.

Los datos de los estudios experimentales de las propias obras, por cuanto reflejan su comportamiento real bajo carga, o, como suele decirse, su trabajo efectivo, son más interesantes y completos que los obtenidos durante el ensayo de modelos.

No obstante, las experimentaciones con modelos, llevadas a cabo en condiciones de laboratorio, tienen sus ventajas, consistentes en que éstos son más simples que las propias construcciones y pueden ser fácilmente confeccionados. Los modelos reflejan, dentro de la cuestión estudiada, sólo las propiedades principales de la estructura. Se pueden modificar durante el proceso de experimentación con el objeto de revelar cualquier particularidad en el comportamiento de la obra bajo carga; finalmente, permiten ser llevados hasta la rotura, lo que tiene especial importancia para estimar la capacidad portante de una estructura, lo cual, se sobreentiende, no se puede hacer con las propias construcciones.

La resistencia mecánica, estabilidad y rigidez de una obra dependen no sólo del material, de las dimensiones y formas de sus elementos, sino también de las fuerzas internas que surgen y se desarrollan en la estructura, al actuar sobre ella una carga. Por consiguiente, las dimensiones de los elementos estructurales, resistentes y estables, hechos de un material dado, se determinan por los valores de las fuerzas internas en estos elementos. Las deformaciones de los elementos estructurales y de la estructura en su conjunto también vienen determinadas por las fuerzas internas. Por eso, en

cualquier cálculo, las fuerzas internas deberán ser halladas en primer término.

Estas fuerzas permitirán juzgar, como resultado del cálculo, sobre la resistencia mecánica, estabilidad y rigidez de toda la estructura en su conjunto y de sus elementos por separado, si las dimensiones de estos últimos han sido prefijadas (cómputo de verificación).

Si se desconocen las dimensiones de los elementos estructurales, las fuerzas internas permitirán determinar sus medidas, de modo que satisfagan a la resistencia mecánica, estabilidad y rigidez exigidas (cómputo de proyecto).

Así, el objeto fundamental de la mecánica de construcción es determinar las fuerzas internas.

Esto se consigue, empleando el conocido método de seccionamiento, que las transforma en sus iguales *externas*, como acción de una de las partes de la estructura seccionada sobre la otra; a estas fuerzas se las llama *sustituyentes* (2). Estas fuerzas aplicadas sobre los lugares de corte, comúnmente se expresan en forma de *fuerzas axiles* o *longitudinales* y *transversales* y de *momentos flectores y torsores*. Por ello, cuando se hable de fuerzas internas, hemos de sobreentender que se trata de sus iguales sustituyentes.

Al determinar las fuerzas internas es necesario tener en cuenta, que cualquier construcción bajo carga modifica sus formas, se deforma. La deformación se acrecienta hasta que las fuerzas internas de la estructura, que se desarrollan con la deformación del material, no estén en condiciones de oponer resistencia al subsiguiente aumento de la deformación de la construcción, después de lo cual, comienza el equilibrio en el estado *deformado*. Esto significa, que cualquier parte elegida de la estructura estará en equilibrio luego de aplicarle, en las secciones hechas mentalmente, las fuerzas *sustituyentes* (internas, convertidas en externas por el corte) de acción recíproca.

Dado que en los materiales de construcción corrientes la deformación se desarrolla a gran velocidad, el equilibrio en estado deformado se establece prácticamente al mismo tiempo de aplicar la carga. Pero, si por su naturaleza física el material de la estructura no está en condiciones de desarrollar tales fuerzas internas que puedan impedir el aumento de la deformación y sean capaces de establecer el equilibrio en estado deformado, entonces la deformación de la estructura continuará hasta la destrucción de ésta.

Con un riguroso planteamiento del problema, las fuerzas internas en una estructura, que se halla en estado deformado, deberían determinarse, con arreglo al método de cálculo adoptado, tomando en consideración el comportamiento de la carga durante la deformación de la estructura. Sin embargo, esto ofrece grandes dificultades, por cuanto las fuerzas internas de una estructura en estado deformado y la deformación misma de esta estructura son interdependientes. Además, deberemos tener en cuenta, que es muy difícil determinarlas, porque, incluso, si el material de tal construcción responde a la ley de Hooke, como norma, entre los desplazamientos y la carga

no habrá dependencia lineal. Esto se complica más aún, en los casos en que el material de la construcción no sigue la ley de Hooke o trabaja más allá de sus límites.

Por eso, tomando en consideración la relativa pequeñez de las variaciones de la forma de una construcción en el curso de su deformación, lo habitual, para simplificar el cálculo, es determinar las fuerzas internas con aproximación, en el estado inicial, no deformado, de la construcción. En muchos casos (¡pero no en todos!), la exactitud de tal determinación resulta prácticamente aceptable. Es indispensable recordar, sin embargo, que la exactitud de la determinación de las fuerzas internas por el estado no deformado, no siempre resulta suficiente, sobre todo, en los cálculos donde la deformación de la estructura puede ser considerable.

En aquellos casos en que la determinación de las fuerzas internas por el estado no deformado de la estructura produce errores sustanciales, como ocurre, por ejemplo, con la flexión longitudinal-transversal de una barra, para determinar las fuerzas internas es necesario considerar la deformación de la estructura.

En este manual se exponen, de modo principal, los métodos determinativos de las fuerzas internas de estructuras compuestas por barras, esencialmente en el estado no deformado, bajo la acción de cargas estáticas. En el último capítulo se examinan brevemente dichos métodos en los estados deformados de la construcción.

§ 2. NOCIONES SOBRE LOS METODOS PARA CALCULAR ESTRUCTURAS. El cálculo de estructuras, en fin de cuentas, se reduce a la apreciación de la resistencia mecánica, estabilidad y rigidez de éstas. Existen tres métodos de cálculo: 1) por las tensiones admisibles; 2) por las cargas admisibles y 3) por los estados extremos o límites.

Método de cálculo por las tensiones admisibles. Este es un método viejo, usado en el extranjero y, parcialmente, también en la URSS, para ciertas estructuras, para las cuales aún no se han elaborado las condiciones técnicas de cálculo por los estados límites. Este consiste en apreciar la resistencia mecánica y la estabilidad de las formas de equilibrio en estado deformado, confrontando las tensiones normales o tangenciales más altas, designadas aquí con la letra σ, y producidas por la acción de la carga, con las tensiones admisibles análogas $[\sigma]$ para el material dado. La tensión admisible se toma como parte de la tensión considerada, por razones de la resistencia o estabilidad, como peligrosa. La condición de resistencia mecánica (estabilidad) por este método, puede ser escrita en la forma general siguiente:

$$\sigma \leqslant [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{peligr}}}{k^*}, \qquad (1.1)$$

donde $k^* > 1$ es el coeficiente de seguridad.

Este coeficiente prevé un margen de resistencia mecánica del material, teniendo en cuenta la posibilidad del incremento de la

carga, de que empeoren las propiedades de resistencia del material, de inexactitud en el cálculo o en la confección de la estructura, etc.

El método de cálculo por las cargas admisibles, elaborado en la URSS, fundamentalmente, para calcular construcciones de hormigón armado, de hormigón y de piedra, estriba en apreciar la resistencia mecánica y estabilidad de una estructura, confrontando las cargas actuantes sobre ella, designadas aquí, en forma general, por la letra P, con la carga admisible $[P]$.

Esta última se toma como parte de la carga considerada, por algún motivo, como peligrosa. Como norma, se llama así a la carga límite, sea la de rotura, determinada tomando en consideración el trabajo del material más allá de la zona elástica, sea la crítica, que ocasiona pérdida de estabilidad. La condición de resistencia mecánica (estabilidad) por este método se escribe así:

$$P \leqslant [P] = \frac{P_{\text{peligr}}}{k^*}. \qquad (1.2)$$

El principal defecto de ambos métodos de cálculo viejos, consiste en que tienen un único coeficiente de seguridad para todos los casos en que trabaja la estructura, en tanto que, por ejemplo, algunas cargas poseen diferente grado de efectividad y posibilidad de crecimiento. Por eso, el margen de seguridad para el crecimiento de tales cargas deberá ser distinto. Este defecto fue elminado en el nuevo método de cálculo de las construcciones por el estado límite, también elaborado en la URSS.

El método de cálculo por el estado límite, aceptado actualmente en la URSS y algunos países extranjeros para calcular estructuras de obras, consiste en que el cálculo de la construcción se efectúa en las condiciones de los así llamados estados límites. Se denomina estado límite de una obra aquel estado, en el que la estructura pierde la capacidad de resistir las influencias externas o queda inútil para el servicio ulterior.

Se distinguen tres tipos de estados límites: *el primer estado límite*, por la resistencia mecánica, estabilidad y fatiga del meterial; *el segundo estado límite*, por la rigidez y *el tercer estado límite*, por la formación de fisuras.

El cómputo por los estados límites deberá proteger a la construcción, durante su servicio, contra la aparición de cualquier estado límite. Las estructuras, antes que nada, deberán satisfacer al cálculo por el primer estado límite, después, por el segundo y el tercero, de acuerdo con la clase de construcción. Así, por ejemplo, en los pisos donde una flecha grande pueda provocar agrietamientos en el revoco o estropear la decoración, es importante satisfacer también al segundo estado límite y, en las cañerías de hormigón armado, al tercero. El comienzo de los estados extremos depende de las cargas, de la resistencia mecánica de los materiales, de las condiciones en que trabaja la estructura y, en algunos casos, de otras causas distin-

tas, para cuya variación deberán ser previstos los márgenes de seguridad.

Por eso, cuando se calcuda una construcción por el primer estado límite, las fuerzas internas de los elementos estructurales no se determinan por aquellas cargas llamadas de *servicio* o *normativas*, que actúan sobre la estructura en las condiciones corrientes, sino por las cargas denominadas *teóricas* o *de cálculo*, obtenidas de las normativas, al ser multiplicadas por el coeficiente n, denominado de *sobrecarga*, como norma, mayor que la unidad.

El coeficiente de sobrecarga, de hecho, es de seguridad, previsto contra una posible incrementación de la carga. Si ésta no puede aumentar bajo ninguna circunstancia durante su servicio, como, por ejemplo, la carga de un tanque de agua de determinada capacidad, entonces, para tal carga no es necesario un margen de seguridad contra su incremento y, el coeficiente de sobrecarga puede ser una magnitud determinada, sólo por la posible variación de la capacidad del tanque respecto al valor proyectado, que se distinga poco de la unidad.

El peso propio de la estructura representa una carga que tampoco es capaz de aumentar durante la explotación de aquélla y su diferencia con la carga utilizada en el cálculo será factible sólo a expensas de la discrepancia de los pesos volumétricos o las medidas de los elementos reales con los proyectados. Tales diferencias, comúnmente, son insignificantes y, para el peso propio, el coeficiente de sobrecarga puede ser pequeño. Otras cargas, por ejemplo, las de forma de tren, automóvil, gentío, etc., al revés, debido a sus capacidades de incrementación, exigen grandes coeficientes de sobrecarga. La idea básica para calcular con cargas teóricas, reside en que el margen de seguridad sobre el aumento de la carga de servicio se prevé en forma independiente para cada caso por separado.

En el método de cálculo por los estados extremos, como cierta porción de la *resistencia de servicio* o *normativa* R^n, obtenida en los ensayos, que representa para el material dado la tensión considerada como peligrosa, se utiliza, en calidad de característica del material, la así llamada *resistencia teórica* o *de cálculo* R. Por eso, para su obtención, en la resistencia normativa se introduce una corrección en forma de *coeficiente* de homogeneidad k, menor que la unidad, a cuenta de la diferencia posible entre los índices estadísticos medios y los índices de resistencia mecánica en un material concreto ($R = kR^n$). Debido a otras causas, que también influencian sobre el margen de resistencia mecánica, se agrega una corrección complementaria, representada por el *coeficiente de condiciones de trabajo* m, que puede ser mayor o menor que la unidad.

El coeficiente de homogeneidad prevé un margen de seguridad por la posible desviación, hacia el lado peor, de la calidad media del material y, el de condiciones de trabajo, un coeficiente de seguridad contra la variación de la resistencia mecánica de la construcción, vinculada con la explotación, contra inexactitudes en el cálculo

y otras justificaciones que exigen reserva de solidez en la estructura [1]. En el método de cálculo por los estados límites, las fuerzas internas de la sección, expresadas por medio de la tensión y los elementos de la sección, se determinan según sea la clase de diagrama de tensiones adoptado en la sección como límite.

Si como límite se toma un diagrama de tensiones en la sección, en el cual ninguna de las tensiones sobrepasa el límite de elasticidad, entonces, la dependencia entre las fuerzas internas y las cargas límites se establece en la fase elástica de trabajo de la construcción. Pero con un riguroso planteamiento del problema, si como diagrama límite de tensiones en la sección se toma un diagrama, en el que el agotamiento de la resistencia en la sección es completo, teniendo en cuenta el desarrollo de las deformaciones plásticas si la estructura ha sido fabricada con materiales plásticos, la dependencia entre las cargas límites será establecida en la fase de rotura.

Dentro del método de cálculo por los estados límites, las condiciones de resistencia mecánica, para las deformaciones simples, pueden ser representadas de dos maneras:

$$1)\ S \leqslant S_{\text{lím}} = mRA; \tag{1.3}$$

$$2)\ \sigma = \frac{S}{A} \leqslant mR, \tag{1.4}$$

donde:

S es la fuerza interna debida a la carga teórica;
$S_{\text{lím}}$ la fuerza interna límite, determinada por el diagrama de tensiones en el estado límite;
R la resistencia teórica o de cálculo;
A la característica geométrica de la sección;
m el coeficiente de condiciones de trabajo;
σ la tensión más alta producida por la carga teórica en el diagrama, cuya forma se asemeja al diagrama de tensiones en el estado límite.

La fórmula (1.4) es convencional y si se supone que para las cargas teóricas dadas la sección llegó al estado límite con su correspondiente diagrama de tensiones, es como si su primer miembro determinara el valor suficiente de la resistencia teórica del material, corregida con el coeficiente de condiciones de trabajo.

En los casos simples, ambas maneras de escribir la condición de resistencia mecánica son tales, que los primeros miembros contienen valores inexistentes en los segundos. En los casos complejos, cuando en la sección hay varias fuerzas internas, tal escritura es imposible, por lo que es conveniente efectuarla en la forma (1.4), sólo que con otro aspecto del miembro intermedio [véase por ejemplo, (10. 25')].

Para los cálculos, ante cargas variables, de la fatiga de un material por el primer estado límite, y de la rigidez, por el segundo, las fuerzas internas se determinan bajo las cargas normativas, lo que

[1] Correspondería representar al margen de seguridad contra la inexactitud de cálculo y otras causas, con un coeficiente especial.

frecuentemente corresponderá al trabajo elástico de la estructura con los diagramas de tensiones en la sección, propios para el material dado. La idea básica para calcular estructuras por los estados límites, es la de *dividir* el coeficiente de seguridad único en tres coeficientes independientes: el de sobrecarga, el de homogeneidad y el de condiciones de trabajo, los que serán diferentes en circunstancias distintas, permitiendo operar más ágilmente con ellos. Se sobreentiende, que tal división del coeficiente de seguridad también es posible en los métodos de cálculo por tensiones y cargas admisibles (de rotura). En efecto, si tomamos como estado límite, por ejemplo, la tensión mayor en cualquier punto de la sección, igual al límite de elasticidad o de fluencia, entonces, de hecho, el cálculo por el estado límite será el cálculo por tensiones admisibles, con una tensión admisible elevada, igual a la resistencia teórica cuyas cargas teóricas también estarán incrementadas, si las comparamos con aquellas que han de actuar sobre la construcción en condiciones corrientes.

La apreciación de la rigidez en una estructura se efectúa de manera parecida por los tres métodos, confrontando los desplazamientos mayores, debidos a las cargas reales o de servicio, con los desplazamientos aceptables para la explotación de la obra.

Al cálculo de estructuras por la fase elástica de trabajo, subordinadas, según la idea generalizada, a la ley de Hooke, cuando las deformaciones y traslaciones son proporcionales a las cargas, se le llama brevemente «cálculo elástico» y al cálculo por la fase elástico-plástica de trabajo, «cálculo plástico».

En la mecánica de construcción, corrientemente, se admite considerar por cálculo de estructuras sólo a su parte fundamental, es decir, a la determinación de los desplazamientos y las fuerzas internas. En correspondencia con esto, los métodos que los determinan, convencionalmente, también son llamados métodos de cálculo de estructuras. Esta denominación será la que emplearemos en adelante.

§ 3. CARGAS. Las fuerzas externas activas que actúan sobre una estructura se llaman cargas. Estas pueden ser repartidas y concentradas. Las cargas repartidas están distribuidas o sobre una superficie o por un volumen y sus intensidades se miden en kgf/cm^2 o en kgf/cm^3, respectivamente.

Las fuerzas repartidas superficial y volumétricamente, actuantes sobre una viga, corrientemente son sustituidas por una carga continua a lo largo de ésta, cuya intensidad se mide en kgf/cm.

Si las cargas superficiales están distribuidas sobre una superficie pequeña, entonces, la resultante se representa en forma de fuerza concentrada.

Las cargas actuantes sobre una estructura suelen ser permanentes y accidentales. Las permanentes, como, por ejemplo, el peso propio, se encuentran constantemente sobre la estructura. Las accidentales, por el contrario, no siempre actúan sobre ella. Estas últi-

mas se subdividen en rodantes o móviles y fijas. Las cargas rodantes se desplazan por la construcción, como, por ejemplo, un automóvil, un tranvía, un trolebús, un tren y otros medios de transporte que actúan sobre un puente. Las cargas fijas, en forma de distintas instalaciones en edificios industriales y civiles, conservan sobre la obra, durante largo tiempo, una posición constante.

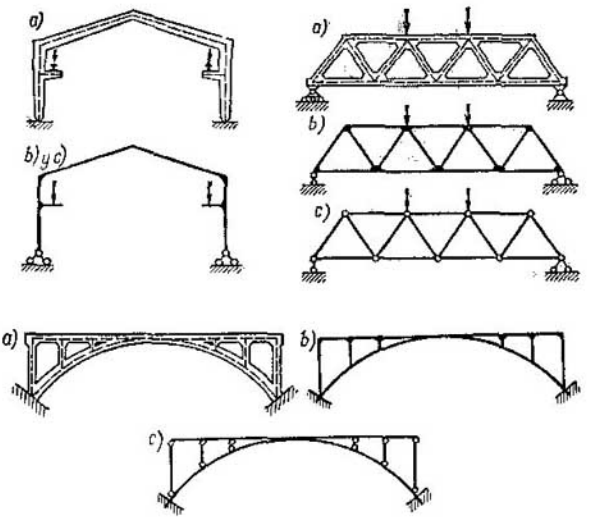
Por el carácter de su acción, las cargas se dividen en estáticas y dinámicas. Las estáticas no cambian ni sus valores, ni sus posiciones, ni sus direcciones. Las restantes son dinámicas. Las cargas variables se consideran *aproximadamente* como estáticas, si se transmiten a la estructura de un modo tranquilo y suave, con reducidas incrementaciones en el tiempo de sus valores, de sus posiciones o direcciones, y originan, en comparación con ellas mismas, fuerzas de inercia pequeñas. En nuestro curso general sólo serán examinadas las cargas estáticas.

§ 4. ESQUEMA TEORICO O DE CALCULO DE UNA ESTRUCTURA. El cálculo de una estructura tomando cuenta exacta de todas las medidas y formas geométricas de sus elementos, como así también de la rigurosa interacción entre ellos, es o complicado en la práctica y, por consiguiente, inaceptable o teóricamente inadmisible. Por eso, la mecánica de construcción, como cualquier otra ciencia, emplea el procedimiento de abstracción científica, sustituyendo las estructuras por sus esquemas.

El esquema de una estructura es su representación simplificada, donde sólo se cuentan los datos fundamentales, que determinan el comportamiento de la estructura bajo carga. En el esquema, las barras se sustituyen por sus líneas centrales llamadas ejes; las placas se sustituyen por sus superficies medias; las secciones transversales de las barras y las normales a la superficie media de las secciones de las placas, independientemente de sus formas, se caracterizan, de un modo general, por los valores numéricos de las superficies y los momentos de inercia; los sistemas reales de sustentación de la construcción son sustituidos por vínculos de apoyo ideales; las cargas sobre las superficies de los elementos son trasladadas a los ejes o a las superficies medias, etc. De esta manera, es como si el esquema de una estructura representara a su esqueleto.

El cómputo de una construcción se hace a base del esquema teórico o de cálculo. Si el esquema completo de una estructura es simple y accesible para el cómputo, entonces se emplea como esquema teórico. Pero si el esquema completo resulta complejo para el cálculo, entonces éste se somete a una simplificación ulterior menospreciando complementariamente ciertas propiedades que juegan un papel secundario en el trabajo de la construcción. Esta simplificación, a veces, es indispensable para la realización de un cálculo aceptable prácticamente por su complejidad y auténtico por su exactitud. En consecuencia, hablando en general, el esquema de cálculo de una estructura es el esquema completo, *simplificado*.

Fig. 1.



En la fig. 1 se exponen varias estructuras (*a*), sus esquemas completos (*b*) y de cálculo (*c*).

La elección del esquema para calcular una construcción es un problema complicado e importante. De ella depende, antes que nada, la calidad del cómputo. Incluso con un método exacto, el cómputo no puede resultar correcto, si el esquema ha sido elegido incorrectamente. Así, por ejemplo, el cálculo de un arco, sin su parte superior (fig. 1), da resultados poco satisfactorios, útiles solamente para conclusiones previas de orientación. De esto deducimos, que la elección del esquema de cálculo depende de la exactitud exigida al cómputo realizado. El esquema para los cálculos preliminares puede ser extremadamente simple y burdo, pero para los definitivos, debe ser más riguroso y más perfeccionado.

En la mecánica de construcción, las estructuras y sus esquemas completos y de cálculo se clasifican por diferentes signos básicos. Por ejemplo, las construcciones, compuestas por barras, se llaman *sistemas lineales* (fig. 2, *a*); las constituidas por placas u hojas, se llaman *sistemas plegados* (*prismáticos*) (fig. 2, *b*) y las compuestas por cuerpos aproximadamente de la misma extensión en las tres direcciones, *sistemas masivos* (fig. 2, *c*).

Por la disposición de ciertos elementos de la construcción, sus esquemas se dividen en planos y espaciales. Las construcciones lineales planas son aquellas en las cuales los ejes de todas las barras están en un mismo plano, que pasa a través de uno de los ejes principales de inercia de sus secciones transversales. Todas las construcciones lineales restantes son espaciales.

Fig. 2

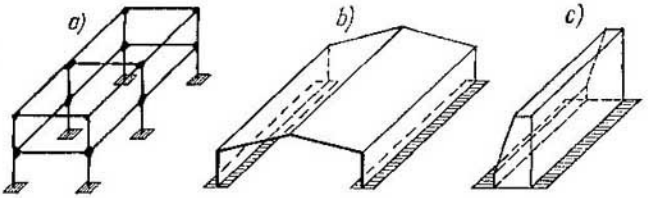
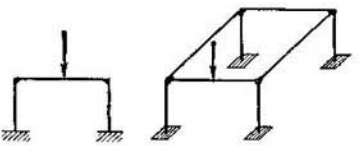


Fig. 3



Las construcciones planas poseen tal propiedad, que si las cargas teóricas están sobre el plano de ellas, entonces, los desplazamientos se producen también en aquel mismo plano, sin que la construcción pierda su estabilidad. Raramente se encuentran construcciones planas independientes; con frecuencia, éstas son únicamente parte componente de las espaciales, de las cuales se separan, comúnmente, para simplificar el cálculo. Así, por ejemplo, el sistema plano de la fig. 3 ha sido separado de uno espacial.

Frecuentemente, al apartar del espacial un sistema plano, disminuye la exactitud del cálculo. En muchos casos, si la pérdida de exactitud no es demasiado grande, la práctica ingenieril se ve obligada a aceptar esto, en gracia a la simplificación del cómputo.

§ 5. SISTEMAS INVARIANTES, VARIANTES Y DE VARIABILIDAD INSTANTANEA. Sistemas *geométricos invariantes* o simplemente *invariantes* son los sistemas de cuerpos sólidos, unidos entre sí, que permiten traslaciones relativas de los cuerpos *sólo* al deformarse el material.

Sistemas *geométricamente variantes* o simplemente *variantes* son los sistemas de cuerpos sólidos, unidos entre sí, que permiten traslaciones relativas finitas de los cuerpos sin deformación del material.

Sistemas de variabilidad instantánea son los sistemas de cuerpos sólidos, unidos entre sí, que permiten traslaciones relativas, *infini-*

Fig. 4

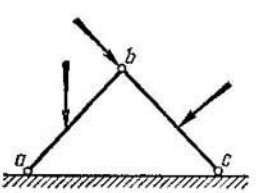
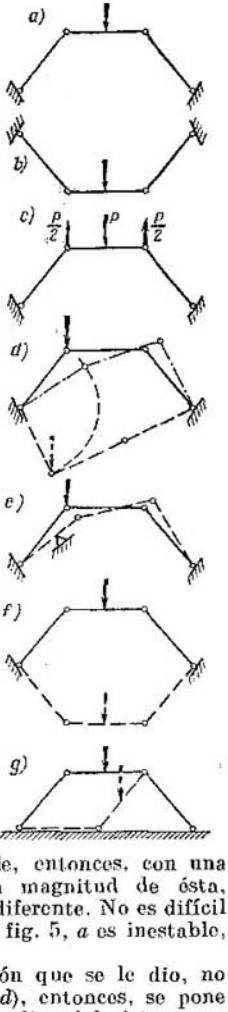


Fig. 5



tesimales, sin deformación del material (si se desprecian las variaciones de las dimensiones del sistema de los órdenes superiores de pequeñez), después de lo cual se tornan invariantes.

Estos últimos representan casos excepcionales de sistemas invariantes.

Un ejemplo simple de un sistema invariante puede ser el formado por dos barras unidas entre sí mediante la charnela *b* y articuladas a un cuerpo fijo en los puntos *a* y *c* (fig. 4). Dado que con tres lados se puede construir sólo un único triángulo, el *abc*, entonces el sistema es invariante.

Este, como cualquier otro sistema invariante, es capaz de recibir sobre sí mismo cualquier carga y equilibrarla con sus fuerzas internas hasta la iniciación de la rotura del material.

El sistema compuesto por tres barras, unidas entre sí y sujetas a un cuerpo fijo por medio de articulaciones (fig. 5, *a*), representa un ejemplo simple de un sistema variante, capaz de deformarse sin variar la longitud de sus barras.

Cualquier sistema variante, como veremos más adelante (§ 12), puede recibir sobre sí mismo y equilibrar con sus fuerzas internas sin cambiar su forma, *sólo* cargas de tipos particulares, apropiadas a la forma dada. Para el sistema que estamos examinando, estas cargas serán, por ejemplo, las representadas en la fig. 5, *a*—*c*.

Por cuanto el sistema variante es movible, entonces, con una carga determinada, independientemente de la magnitud de ésta, el equilibrio puede ser estable, inestable e indiferente. No es difícil darse cuenta, que la posición del sistema en la fig. 5, *a* es inestable, en la 5, *b*, estable y en la 5, *c*, indiferente.

Si el sistema variante, con la configuración que se le dio, no puede equilibrar a la carga actuante (fig. 5, *d*), entonces, se pone en movimiento. Una de las posiciones intermedias del sistema en movimiento está indicada en la figura con punto y raya. Este movimiento se prolongará hasta que el sistema adquiera la forma adecuada

para su equilibrio estable (fig. 5, *d*) o en su movimiento encuentre cualquier obstáculo en su camino (fig. 5, *e*), que sirva de vínculo complementario, y el sistema deje de ser variante en la dirección del movimiento efectuado.

En tales casos, como norma, el sistema variante, «acomodándose» a la carga, recibe grandes desplazamientos y ocupa la posición de equilibrio estable, si su resistencia no es alterada. Al encontrarse

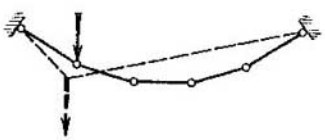


Fig. 6

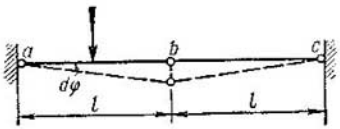


Fig. 7

en equilibrio inestable, el sistema variante se comporta aproximadamente así (fig. 5, *a*). Este indefectiblemente se pone en movimiento, que cesará en una nueva posición estable (fig. 5, *f*) o en una nueva posición con vínculos complementarios (fig. 5, *g*).

Naturalmente, sólo las formas estables de equilibrio de los sistemas variantes pueden, en alguna medida, ser utilizadas en la práctica. Así, por ejemplo, a veces, para una carga vertical se usan cables flexibles y cadenas articuladas (fig. 6).

De lo antedicho resulta, que los sistemas variantes son poco útiles para las construcciones que soportan distintos tipos de carga.

En la fig. 7 se da un ejemplo simple de un sistema de variación instantánea. El movimiento infinitesimal del mismo se explica por que la articulación *b*, en el caso de desplazamiento vertical, deberá describir los arcos con los radios *ab* y *cb*, trazados desde los centros *a* y *c*, que poseen una tangente vertical común. Esto significa, que la traslación infinitesimal del punto *b* es factible, por cuanto la diferencia entre las longitudes de cada barra en las posiciones inclinada y horizontal es una magnitud del segundo orden de pequeñez

$$\Delta l = \frac{l}{\cos d\varphi} - l \approx \frac{1}{2} l\, d\varphi^2.$$

Cualquier sistema variante o de variación instantánea, no modificando su forma sin deformación del material, puede equilibrar *sólo* cargas de tipos particulares y precisamente aquellas que son susceptibles de ser equilibradas por el sistema variante, obtenido del de variación instantánea (v. § 12).

Si la carga no puede ser equilibrada por el sistema de variación instantánea, entonces, éste adquiere desplazamientos infinitesimales que, en las condiciones reales, considerando la deformación del material, se tornan finitos y, como norma, grandes (v. § 12). Los sistemas de variación instantánea, así como los variantes, son poco útiles para las construcciones que soportan diferentes tipos de carga.

§ 6. SISTEMAS ESTATICAMENTE DETERMINADOS (ISOSTÁTICOS) Y ESTATICAMENTE INDETERMINADOS (HIPERESTÁTICOS). Una de las tareas fundamentales de la mecánica de construcción consiste en la determinación de las fuerzas internas en los elementos de una construcción. Los métodos de determinación de éstas dependen de si el problema es estáticamente determinado (isostático) o indeterminado (hiperestático).

Si todas las fuerzas internas en la construcción, para las admisiones dadas, referentes a la determinación de ellas y al esquema de cálculo adoptado, pueden ser determinadas sólo con las ecuaciones de la estática, sin el estudio del estado de deformación de la construcción, entonces tales *problemas* se denominan *estáticamente determinados* o *isostáticos*. Pero, si todas las fuerzas internas en la construcción, o parte de ellas, para las admisiones dadas, respecto a su determinación y al cálculo adoptado, no pueden ser determinadas sólo con las ecuaciones de la estática, y para determinarlas se exige el estudio del estado de deformación del sistema, entonces, tales problemas se denominan *estáticamente indeterminados* o *hiperestáticos*.

En los problemas isostáticos, las fuerzas internas, cuya determinación se efectúa únicamente con las ecuaciones de equilibrio, *no dependen de las dimensiones transversales, de la forma y del material de los elementos estructurales por separado.*

En los problemas hiperestáticos, las fuerzas internas, cuya determinación está ligada con el estudio del estado de deformación del sistema, al depender éste de las dimensiones, forma y material de los elementos por separado, *dependen también de las dimensiones, de la forma de las secciones transversales y del material de los elementos estructurales por separado.*

Los valores de las fuerzas internas dependen de aquellas premisas, sobre la base de las cuales éstas se determinan. De estas mismas premisas también depende la división de los problemas en isostáticos e hiperestáticos. Como veremos más adelante, para un mismo esquema de cálculo, el problema, con unas premisas puede ser isostático y con otras, hiperestático. Así, por ejemplo, el problema más simple de determinación del momento en el empotramiento de un voladizo (fig. 8, *a*) será isostático, al despreciar el desplazamiento horizontal de su extremo, o sea, al considerar que $l_1 = l$, e hiperestático, si no lo despreciamos. Con la misma premisa, al despreciar el desplazamiento del extremo de la viga, pero ya con la presencia en ese extremo de una fuerza horizontal (fig. 8, *b*), el problema se torna hiperestático. Y sólo si en el último caso menospreciamos también el desplazamiento vertical del extremo de la viga, el problema será isostático.

Todo lo dicho con respecto a la viga empotrada en un extremo se refiere también a la que descansa sobre dos apoyos (fig. 8, *c*, *d*). Si en el caso de una carga vertical (fig. 8, *c*) despreciamos los desplazamientos horizontales, entonces, el problema será isostático, pero, si no los despreciamos, será hiperestático. El problema para la

misma viga, pero con la presión aún de una fuerza horizontal (fig. 8, *d*) será isostático, sólo en aquel caso en que desdeñemos los desplazamientos horizontales y verticales. Con otras palabras, para estas vigas, los problemas serán isostáticos, si las fuerzas internas se determinan por el esquema de viga *no deformada*.

En consecuencia, *la indeterminación estática del problema depende de la forma del sistema, del tipo de cargas y de las premisas, a base de las cuales se determinan las fuerzas internas y las reacciones.*

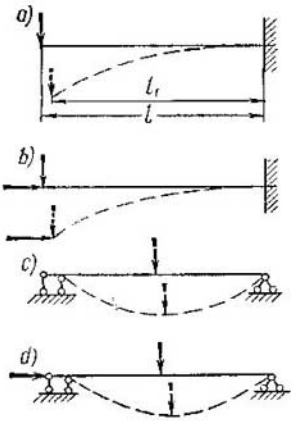


Fig. 8

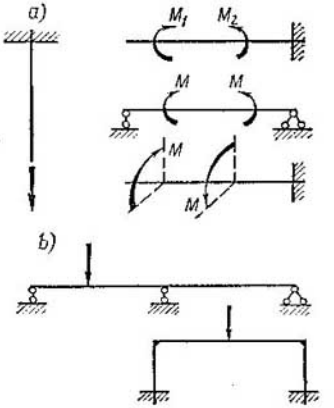


Fig. 9

Al lado de tales problemas existen los que *siempre* son isostáticos y *siempre* hiperestáticos. Así, por ejemplo, en la fig. 9, *a*, se plantean algunos problemas sobre la determinación de las fuerzas internas, que para cualquier premisa son isostáticos y, en la fig. 9, *b*, hiperestáticos, por cuanto el número de reacciones incógnitas en los apoyos es mayor de tres, es decir, mayor que el número de ecuaciones de equilibrio.

Es necesario señalar, que los problemas de determinación de las fuerzas internas, siempre isostáticos con cualquier premisa para su determinación son bastante raros y se refieren sólo a casos particulares, aislados, que no tienen gran valor práctico, mientras que los siempre hiperestáticos son mucho más frecuentes.

La hiperestaticidad de los problemas de estos últimos no depende del tipo de cargas. Esta se determina por el propio sistema en cualesquiera condiciones y, por eso, a tales *sistemas* se los puede separar y denominar *hiperestáticos*.

En los restantes sistemas, los problemas de determinación de las fuerzas internas, en dependencia de las admisiones durante su determinación, serán o isostáticos o hiperestáticos.

Si excluyendo los casos particulares mostrados en la fig. 9, *a* y sus similares, determináramos las fuerzas internas, como correspondería a un planteamiento riguroso del problema, por el estado de deformación de la construcción, teniendo en cuenta todos sus desplazamientos, entonces, todos los problemas para determinar las fuerzas internas serían estáticamente indeterminables y, por consiguiente, los sistemas isostáticos dejarían de existir completamente.

Pero, si calculamos las fuerzas internas, como se suele hacer, por el estado no deformado de las construcciones, entonces, todos los problemas referentes a la determinación de las fuerzas internas en los sistemas restantes, que se encuentran en equilibrio y no son hiperestáticos, serán problemas estáticamente determinables, independientemente de las cargas. En tales casos, a estos *sistemas* se los puede llamar *isostáticos*.

De todo lo dicho resulta, que la división de los sistemas (¡y no de los problemas!) en estáticamente determinables e indeterminables, independientemente de la carga actuante, es posible sólo en aquel caso en que las fuerzas internas se determinen por el estado no deformado de la construcción. Entonces, *isostáticos son aquellos sistemas*, que al encontrarse en equilibrio, todas las fuerzas internas pueden ser determinadas por las ecuaciones de la estática, e *hiperestáticos*, son aquellos que al encontrarse en equilibrio, todas las fuerzas internas no pueden ser determinadas por tales ecuaciones.

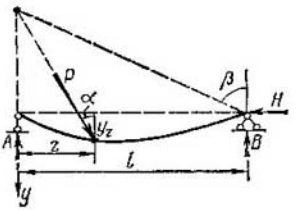
§ 7. PRINCIPIO DE INDEPENDENCIA DE ACCION DE LAS FUERZAS EXTERNAS. El principio de independencia de acción de las fuerzas externas, o, de otro modo, el principio de superposición, consiste en que, para varias fuerzas externas que actúan en conjunto sobre la construcción, cualquier magnitud (reacción de apoyo, fuerza interna, tensión, desplazamiento, etc.), se determina como la suma algebraica o geométrica de los valores de las componentes de esta magnitud, debidos a cada fuerza por separado.

La suma algebraica para las magnitudes escalares y los valores numéricos de los vectores (módulos) se obtiene, cuando los vectores de la magnitud a determinar están ubicados en una misma recta, y la suma geométrica, para los valores vectoriales, cuando los vectores de la magnitud a determinar pasan por un mismo punto. Así, por ejemplo, el valor de la reacción de un apoyo rodante, cuya línea de acción no depende de la carga, puede ser representado con una suma algebraica, y el vector de la reacción de un apoyo fijo, cuya línea de acción depende de la carga, deberá ser representado con una suma geométrica. Análogamente, la magnitud de la tensión normal sobre una superficie dada puede ser representada con una suma algebraica, y el vector de la tensión completa en ella, con una geométrica.

El principio de independencia de acción de las fuerzas externas juega en la mecánica de construcción un papel excepcionalmente grande. Simplifica considerablemente los cálculos y, por eso, muchos de ellos están construidos sobre la base de este principio. Conviene

hacer notar, sin embargo, que, rigurosamente hablando, si las fuerzas internas y las reacciones son determinadas por el estado de deformación de la construcción, teniendo en cuenta todos los factores que influencian sobre los desplazamientos del sistema, entonces, el principio de independencia casi nunca se justifica [1]. Este sólo tiene lugar para ciertas premisas complementarias y, ante todo, en los sistemas invariantes. En los sistemas variantes, por cuanto bajo cada carga éstos adoptan una forma de equilibrio particular, podemos hablar sobre la utilización del principio de independencia de acción de las fuerzas sólo en casos particulares, en relación a aquellas cargas,

Fig. 10



cada una de las cuales produce cambios pequeños en la forma inicial de los sistemas variantes o no produce absolutamente ninguno.

El principio de independencia, prácticamente, puede ser empleado observando las siguientes condiciones:

1) cada carga por separado y todas juntas producen cambios pequeños en la forma del sistema;

2) la determinación de las reacciones y de las fuerzas internas se efectúa por el estado no deformado;

3) el material debe ser elástico y corresponder a la ley de Hooke.

Para convencernos de la exactitud del principio de independencia con determinadas admisiones, es necesario determinar, en forma general, y con las mismas admisiones, la magnitud escalar o vectorial analizada, debida a la fuerza concentrada P de dirección arbitraria y variable, aplicada sobre cualquier punto del sistema. Si la magnitud escalar analizada depende linealmente de la fuerza P, cualquiera que sea su dirección y posición (para la magnitud vectorial la dirección o es constante o no depende del valor de la fuerza P), el principio de superposición, para la magnitud analizada, es correcto.

Así, por ejemplo, las reacciones de apoyo de una viga ordinaria (fig. 10), considerando sólo sus desplazamientos verticales, debidos a la fuerza P, en la forma general serán:

$$A = \frac{P\cos\alpha\cdot(l-z)}{l} + \frac{P\,\mathrm{sen}\,\alpha\cdot y_z}{l};\quad B = \frac{P\cos\alpha\cdot z}{l} - \frac{P\,\mathrm{sen}\,\alpha\cdot y_z}{l};$$

$$H = P\,\mathrm{sen}\,\alpha;\quad \mathrm{tg}\,\beta = H : B.$$

[1] Con respecto a la determinación de las fuerzas internas, los casos presentados en la fig. 9, *a* son excepciones.

Por cuanto la propia magnitud y_z depende de la fuerza P, las reacciones de apoyo A y B se encuentran en dependencia no lineal de P y, por eso, con tales premisas, para ellas no es utilizable el principio de independencia. Pero éste tendrá lugar con aquellas mismas condiciones, si la carga es vertical, cuando $\alpha = 0$.

Si se ignoran los desplazamientos verticales de la viga, el principio de independencia podrá ser empleado para cualquier dirección de la carga.

En aquellos casos, en que la magnitud a determinar se da en forma diferencial, como, por ejemplo, las flechas de una viga sobre fundación elástica, comprimida por la fuerza P:

$$y^{IV} + \frac{P}{EJ(z)} y'' + \frac{k(z)\,b}{EJ(z)} y = \frac{q(z)}{EJ(z)}, \tag{1.5}$$

la aplicabilidad del principio se puede establecer así. Supongamos que $q = q_1 + q_2$, entonces, para cada carga:

$$y_1^{IV} + \frac{P}{EJ(z)} y_1'' + \frac{k(z)\,b}{EJ(z)} y_1 = \frac{q_1}{EJ(z)}; \tag{1.6}$$

$$y_2^{IV} + \frac{P}{EJ(z)} y_2'' + \frac{k(z)\,b}{EJ(z)} y_2 = \frac{q_2}{EJ(z)}. \tag{1.7}$$

Sumando estas ecuaciones y confrontándolas con (1.5), obtenemos $y = y_1 + y_2$. Los signos de la aplicabilidad del principio de superposición en el escrito analítico son los siguientes:

1) la magnitud examinada deberá ser una función lineal homogénea de las fuerzas externas

$$S = \bar{S}_1 P_1 + \bar{S}_2 P_2 + \ldots + \bar{S}_k P_k + \ldots + \bar{S}_n P_n, \tag{1.8}$$

donde:

S es la magnitud analizada;

$\bar{S}_k$, la magnitud analizada, debida a la fuerza P_k, que le toca a la unidad de esta fuerza y no dependiente de su valor.

Esta expresión, de hecho, es la determinación analítica del propio principio de independencia;

2) la ecuación diferencial de la magnitud a determinar deberá ser lineal, con los coeficientes independientes de las fuerzas con respecto a las cuales se investiga el principio de superposición y, su segundo miembro, si no es igual a cero, deberá depender linealmente de estas fuerzas.

CAPITULO II * FORMACION Y PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS PLANOS

§ 8. GRADOS DE LIBERTAD Y VARIABILIDAD DE LOS SISTEMAS. Las obras de ingeniería compuestas por elementos aislados, en forma de cuerpos sólidos, como norma, portan carga de diferente tipo y, por consiguiente, en la mayoría de los casos son

invariantes. Por eso, al ingeniero-constructor le es importante saber cómo unir correctamente las piezas de la construcción para poseer un sistema invariante y cómo juzgar sobre la invariabilidad del sistema si éste ha sido dado.

Barras de diferente tipo son los elementos aislados de los sistemas lineales planos (fig. 11, *a*). A estas barras, independientemente de sus formas geométricas concretas, y también a los sistemas invariantes compuestos por ellas, los vamos a denominar discos, represen-

Fig. 11

tándolos bajo la apariencia de figuras planas con formas indeterminadas (fig. 11, *b*).

La unión de los discos, en el sistema, está ligada a las nociones sobre grados de libertad y variabilidad de los sistemas.

La libertad de un sistema es su posibilidad de realizar, sin deformación del material, cualquier tipo de movimiento con respecto a la tierra. Se llama grado de libertad L^* del sistema, al número de parámetros independientes que determinan la posición del mismo con respecto a la tierra.

Variabilidad de un sistema es la propiedad de modificar su forma geométrica sin deformación del material, a cuenta de los desplazamientos finitos de sus elementos como cuerpos sólidos. Se llama grado de variabilidad V del sistema al número de parámetros independientes, determinantes de la posición del sistema con respecto a uno de sus discos tomado como fijo. Por cuanto el disco fijo en relación con la tierra posee tres grados de libertad, entonces, entre los grados de libertad y la variabilidad tiene lugar la simple dependencia

$$V = L^* - 3. \tag{2.1}$$

Al grado de libertad del sistema se puede considerar como de variabilidad, si en el sistema incluimos a la tierra en calidad de disco complementario.

A su vez, al grado de variabilidad del sistema se le puede considerar como de libertad, en relación con un disco tomado convencionalmente por la tierra.

Se sobreentiende, que la noción sobre grados de libertad L^* de un sistema es aplicable también para un solo disco.

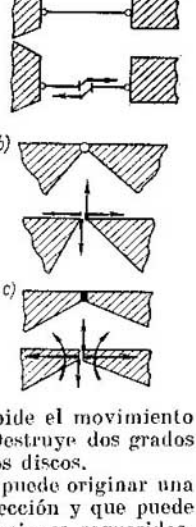
§ 9. VINCULOS Y SISTEMAS SIMPLES. La formación de sistemas con discos sueltos se efectúa por medio de vínculos. Cada disco aislado, en relación a otro, posee tres grados de libertad, dado que puede tener dos movimientos de traslación o progresivos en la direc-

ción de los ejes de coordenadas y uno rotatorio alrededor de un punto. Los vínculos correctamente ubicados impedirán los respectivos desplazamientos recíprocos de los discos y disminuirán el número de sus recíprocos grados de libertad.

Cada vínculo posee, tanto característica cinemática, como estática (de fuerza).

La *característica cinemática* determina qué movimientos de un disco con respecto a otro impide el vínculo y cuántos grados de liber-

Fig. 12



tad aniquila. La *característica estática* del vínculo determina qué reacciones pueden surgir en él. Examinemos tres tipos de vínculos en los sistemas planos.

1. El *vínculo del primer tipo* es una barra con articulaciones en los extremos (fig. 12, *a*).

Característica cinemática: el vínculo impide el movimiento de traslación de un disco con respecto a otro por la dirección de la barra. Destruye un grado de libertad del desplazamiento recíproco de los discos.

Característica estática: en el vínculo se puede originar una fuerza de reacción dirigida a lo largo de la barra.

2. El *vínculo del segundo tipo* es una articulación cilíndrica (fig. 12, *b*).

Característica cinemática: la articulación impide el movimiento de traslación de un disco con respecto a otro. Destruye dos grados de libertad del desplazamiento recíproco de los discos.

Característica estática: En la articulación se puede originar una fuerza reactiva que la atraviese en cualquier dirección y que puede ser dividida en dos componentes hacia las direcciones requeridas. La articulación, en el sentido cinemático, es equivalente a dos barras, es decir, a dos vínculos del primer tipo.

3. El *vínculo del tercer tipo* es una soldadura (fig. 12, *c*).

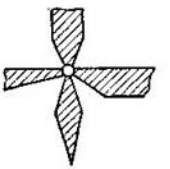
Característica cinemática: la soldadura (pegadura) impide por completo los tres desplazamientos recíprocos, o sea, no permite movimientos ni de traslación, ni de rotación de un disco con respecto a otro. Ella destruye los tres grados de libertad del desplazamiento recíproco de los discos y une dos discos en una sola pieza, en un solo disco.

Característica estática: en la soldadura puede surgir una fuerza de reacción de cualquier dirección, que pase por cualquier punto de la soldadura, y un momento con respecto a este punto; en otras

palabras: dos fuerzas en direcciones preestablecidas y un momento con respecto al punto de intersección de estas fuerzas. La soldadura, cinemáticamente, es equivalente a tres barras o a una articulación y una barra, es decir, a tres vínculos del primer tipo.

Si la articulación o la soldadura une a más de dos discos (fig. 13), entonces, a tales vínculos se los denomina múltiples. Estos sustituyen a tantas articulaciones y soldaduras simples, cuantos discos unen, menos uno.

Fig. 13

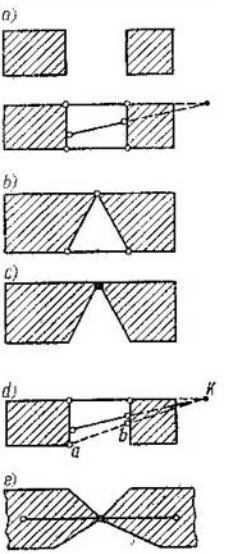


Examinemos los casos de la formación de sistemas invariantes compuestos por dos o tres discos.

1. SISTEMAS COMPUESTOS POR DOS DISCOS

Los tres grados de libertad de los desplazamientos relativos de dos discos pueden ser destruidos: con tres barras (fig. 14, *a*), una articulación y una barra (fig. 14, *b*), o con una soldadura (fig. 14, *c*).

Fig. 14



Aquí se indica, únicamente, el número mínimo indispensable de vínculos para la obtención de un sistema invariante de dos discos. No obstante, aparte de estos vínculos, entre los discos, debido a cualquier otra consideración, pueden ser introducidos vínculos complementarios, llamados superfluos y a los cuales, se comprende, no se debe considerar como innecesarios. Si entre los discos se introdujera una cantidad insuficiente de vínculos, menos de los que se indican en la fig. 14, entonces, el sistema será variante.

En el caso de unión de dos discos con tres barras, es indispensable que *las tres no se crucen en un punto*. En el caso contrario (fig. 14, *d*), obtendremos un sistema de variabilidad instantánea, que permitirá un desplazamiento infinitesimal relativo entre los discos, como cuerpos absolutamente sólidos.

El asunto está en que, cualquiera tercera barra (en la fig. 14, *d*, se indica con línea punteada) no puede impedir el giro mutuo infinitesimal de los discos alrededor del centro instantáneo de rotación *K*, posibilitado por la unión de los discos sólo con dos barras restantes. Esto se explica, por que los extremos de la tercera barra fueron ligados a tales puntos *a* y *b* de los discos que, en el caso de rotación infinitesimal relativa de los discos alrededor del centro *K*, se desplazarán perpendicularmente a la barra *ab*. Con tal movimiento de los puntos *a* y *b*, la distancia entre ellos no cambia (más exactamente, varía en una magnitud del orden superior de pequeñez con respecto al ángulo de rotación). Por cuanto lo que impide la tercera barra es sólo aquel desplazamiento de los discos, con el cual varía la distancia entre los puntos *a* y *b*, entonces, en el caso examinado, ésta no impedirá la rotación recíproca infinitesimal de los discos. Por esta razón, cualquiera de las tres barras se halla colocada en el sistema en posición incorrecta o falsa (fig. 14, *d*).

Al unir dos discos, la variabilidad instantánea se conserva, incluso en el caso, en que entre ellos se coloquen barras suplementarias que se crucen también con las tres anteriores en un punto.

Al unir dos discos con una articulación y una barra es indispensable que *esta última no pase por la articulación* (fig. 15, *c*), de lo contrario, tampoco impedirá la rotación infinitesimal alrededor de la articulación. El sistema de dos discos ligados por una articulación y una barra, que pasa a través de la articulación, también es de variación instantánea.

2. SISTEMAS COMPUESTOS POR TRES DISCOS

Dos discos unidos entre sí en un sistema invariante pueden ser considerados como uno solo. A ellos se les puede unir un tercero, luego un cuarto, etc.

Examinemos, ahora, los casos especiales de sistemas invariantes compuestos por tres discos, donde cada dos fueron unidos entre sí únicamente con un par de vínculos.

Si en un sistema de dos discos, ligados por una articulación y una barra, hacemos figurar a esta última en calidad de tercer disco

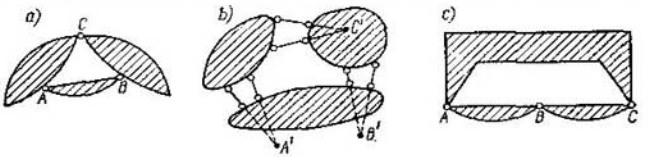


Fig. 15

(fig. 15, *a*), entonces, tendremos un sistema de tres discos ligados por tres articulaciones, *A*, *B* y *C*. La barra que une a los dos discos no debe pasar por la articulación, debido a lo cual, las tres articulaciones, que unen por parejas a los tres discos, no deberán encontrarse

en una recta. Por cuanto en un sistema variante, la articulación que une a dos discos, no habiendo otras ligaduras, es el centro instantáneo de la rotación recíproca de ellos y, dado que este centro tiene lugar al unir dos discos con dos o más barras que se cortan en un punto (fig. 15, *b*), entonces, la regla de unión de tres discos en un sistema invariante se puede escribir de la siguiente manera: *tres discos pueden ser ligados por parejas por medio de una articulación o dos o más barras que se corten en un punto, con la condición de que las articulaciones y los puntos de intersección de las barras no se encuentren sobre una misma recta.* En caso contrario, el sistema será de variabilidad instantánea (fig. 15, *c*).

La unión de tres discos en un sistema invariante mediante tres articulaciones, no dispuestas en una misma recta, se puede considerar como la formación de un nuevo nudo de articulación *C* entre dos discos, ligados al tercero con las articulaciones *A* y *B* (fig. 15, *a*). Por tal regla, por ejemplo, tiene lugar la formación de los sistemas particulares compuestos por barras rectas, unidas por los extremos sólo con articulaciones (fig. 16).

Los sistemas invariantes, cuya formación puede ser seguida por las reglas de unión de dos o tres discos se llaman *simples*.

El triángulo *1 2 3* (fig. 16), cuya invariabilidad es evidente, es la base de la formación de los sistemas simples, compuestos por barras rectas, unidas por los extremos con articulaciones. La ulterior formación sucesiva de nudos en el sistema se efectúa por medio de dos barras que no se encuentren en una misma recta. Si las dos barras que «unen» el nuevo nudo se encuentran en una misma recta, el nuevo nudo tendrá un movimiento infinitesimal en dirección perpendicular a estas dos barras. Si tal sistema está compuesto sólo

Fig. 16

de campos triangulares, no superpuestos uno sobre otro, y su contorno exterior no tiene puntos de autointersección, entonces, es fehacientemente *invariable*. La conclusión contraria, sobre que, si tal sistema de barras está compuesto no solamente de campos triangulares, es variante, no siempre es correcta. Por ejemplo, en la figura 16 se muestra un sistema, en el cual existe un campo cuadrangular, el *1 3 5 6* y, sin embargo, el sistema es invariante.

§ 10. FIJACION DE SISTEMAS A TIERRA. Pueden encontrarse sistemas no sujetos a la tierra, llamados *libres*, y *sujetos* a ella. Estos últimos, con respecto a la tierra, en la mayoría de los casos

son invariantes. Aquí serán examinados, precisamente, tales sistemas. La fijación de los sistemas a tierra se efectúa por medio de vínculos llamados de apoyo. Si el sistema fijado a tierra o a otro sistema unido con anterioridad a ella es invariante, entonces, tomando convencionalmente a la tierra como disco complementario, llegamos a la conclusión de que es indispensable ligar dos discos entre sí, el sistema invariante y la tierra (fig. 17). Por consiguiente, el sistema invariante puede ser fijado a la tierra por las reglas de unión de dos discos:

1) Con tres barras que no se intersequen en un mismo punto (fig. 17, *a*);

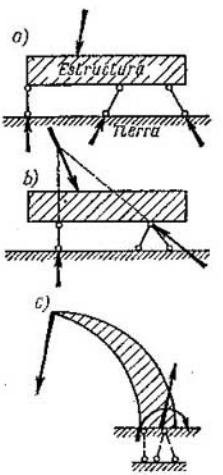
2) Con una articulación, que puede ser formada por dos barras que se corten y otra que no pase por la articulación (fig. 17, *b*);

3) Con una soldadura (fig. 17, *c*), que puede ser representada por una articulación y una barra, que no corte a la articulación.

El vínculo de apoyo en forma de barra es la representación simbólica de un apoyo articulado rodante, la dirección de la movilidad del cual es perpendicular a la barra y su reacción está dirigida a lo largo de ella.

El vínculo de apoyo en forma de dos barras que componen una articulación es la representación simbólica de un apoyo articulado fijo, la reacción del cual pasa a través de la articulación y puede tener cualquier dirección.

Fig. 17



El vínculo de apoyo en forma de soldadura es la representación simbólica del empotramiento con la reacción en forma de momento y de fuerza con dirección arbitraria.

Dentro de la mecánica de construcción, no es sustancial la construcción de los sistemas de apoyo y, por eso, aquí no son examinados.

Durante el examen de la cuestión sobre la sujeción de los sistemas invariantes a tierra, fue indicado sólo el número mínimo de vínculos, indispensable para garantizar la invariabilidad del sistema fijo.

Si el sistema que se sujeta a tierra es variante, entonces, la fijación se efectúa con una mayor cantidad mínima de vínculos indispensables, que para el invariante. En este caso, para la obtención de un sistema invariante, fijo a tierra, la insuficiencia de vínculos dentro del mismo deberá ser compensada con vínculos de apoyo complementarios. A tales sistemas fijos, invariantes sólo en los apoyos, los vamos a llamar *vinculados*.

§ 11. VINCULOS INDISPENSABLES, SUPERFLUOS Y FICTICIOS. Durante la formación de sistemas invariantes simples en el § 9 fueron presentados algunos ejemplos de vínculos indispensables, superfluos y ficticios.

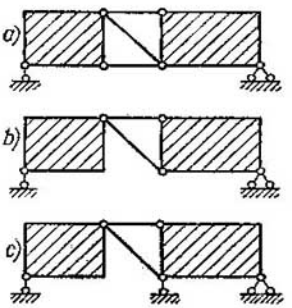
Vínculo *indispensable* en un sistema invariante es un vínculo cuya eliminación transforma al sistema en variante o de variabilidad instantánea. Vínculo *superfluo* en un sistema invariante es un vínculo sin el cual el sistema no pierde su invariabilidad.

Vínculo *ficticio* es aquel que, en los discos por él unidos, permite sólo desplazamientos relativos infinitesimales.

Cualquier vínculo ficticio está colocado de tal manera, que sin él, el desplazamiento por su dirección, en el caso de desplazamiento infinitesimal relativo del sistema en relación al parámetro que lo determina, será una magnitud de un orden superior de pequeñez. De este modo, este vínculo no puede impedir este desplazamiento infinitesimal. Los vínculos ficticios tienen lugar sólo en los sistemas de variabilidad instantánea.

En los sistemas invariantes, los vínculos pueden ser sustituibles: uno indispensable por otro indispensable, y uno superfluo por otro superfluo. En esto se basa la transformación de los sistemas mediante la sustitución de vínculos (fig. 18, *a*). Esta consiste en que se quita del sistema, por ejemplo, un vínculo indispensable, haciéndolo

Fig. 18



variante, (fig. 18, *b*) y luego se introduce otro nuevo indispensable, en distinto sitio, para que el sistema vuelva a ser invariante (fig. 18, *c*). Con tal procedimiento, de un sistema pueden ser obtenidos muchos otros distintos. Si en este caso, un vínculo indispensable interno es substituido por un vínculo de apoyo indispensable, entonces se consigue un sistema fijo, invariante sólo si existen todos los vínculos de apoyo.

La noción sobre vínculos indispensables y superfluos se puede extender también a los sistemas variantes y de variabilidad instantánea. En los sistemas variantes, indispensable es aquel vínculo cuya eliminación eleva el grado de variabilidad en una unidad, y superfluo, aquel que no lo modifica. En los sistemas de variabilidad instantánea, indispensable es aquel vínculo ficticio cuya eliminación transforma al sistema en variante, y superfluo, aquel vínculo sin el cual el sistema sigue siendo de variabilidad instantánea.

Generalizando las características de los vínculos indispensables y superfluos en los distintos sistemas, podemos escribir:

Vínculo indispensable es aquel cuya eliminación modifica la naturaleza cinemática del sistema: el invariante pasa a ser variante o de variabilidad instantánea; el de variabilidad instantánea pasa a ser variante y el variante sigue siéndolo, pero con el grado de variabilidad aumentado en una unidad;

Vínculo superfluo es aquel cuya eliminación no modifica la naturaleza cinemática del sistema: el invariante seguirá siendo invariante; el de variabilidad instantánea conservará su variabilidad y el variante permanecerá tal, con el mismo grado de variabilidad.

§ 12. REACCIONES DE LOS VINCULOS DEBIDAS A LAS CARGAS. Los sistemas invariantes pueden recibir y equilibrar todo tipo de cargas.

Los sistemas variantes pueden recibir sobre sí mismos, sin modificar la forma dada, *sólo* cargas de tipos particulares, características para esta forma. Estas cargas pueden ser establecidas por el principio de los posibles desplazamientos, por el cual, *si un sistema se encuentra en equilibrio y con vínculos ideales y bilaterales, la suma de los trabajos de todas las fuerzas aplicadas al sistema, invertidos en cualesquiera desplazamientos infinitesimales posibles, calculada incluso hasta valores reducidos del primer orden de pequeñez, es igual a cero.* Por ejemplo, las cargas actuantes sobre el sistema variante, presentado en la fig. 5, *a*, *b* y *c*, satisfacen a tal condición.

Los sistemas de variabilidad instantánea, lo mismo que los variantes, pueden recibir sobre sí mismos y equilibrar sin deformación del material ni desplazamientos infinitesimales de sus elementos, como cuerpos absolutamente sólidos, *únicamente* cargas de tipos particulares y, precisamente, aquellas que sin variar sus formas podrían equilibrar los sistemas monovariantes, obtenidos de los de variabilidad instantánea al quitarles los vínculos ficticios.

Las cargas actuantes sobre los sistemas son las que provocan las reacciones de los vínculos. Por cuanto los sistemas invariantes,

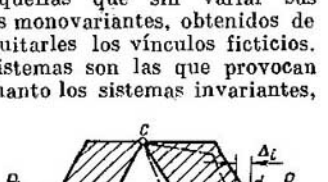


Fig. 19

variantes y de variabilidad instantánea pueden poseer tanto vínculos indispensables, como superfluos, entonces, la determinación de estas reacciones depende de si el vínculo dado es indispensable o superfluo.

Demostremos que, *si vamos a calcularlas por el estado no deformado del sistema, las reacciones de los vínculos indispensables de los siste-*

mas variantes e invariantes que se encuentran en equilibrio son estáticamente determinadas; que las reacciones de los vínculos superfluos son estáticamente indeterminadas, y que todas las reacciones de los vínculos indispensables y superfluos ficticios de los sistemas de variabilidad instantánea, que en el estado inicial se encuentran en equilibrio, son estáticamente indeterminadas.

Haremos la demostración sobre la base del principio de los desplazamientos posibles.

Primeramente, del sistema invariante o variante eliminamos un vínculo *indispensable*. Transformamos al sistema invariante en variante (fig. 19) y al variante le elevamos el grado de su variabilidad en una unidad. Sustituimos la acción sobre el sistema del vínculo quitado por las reacciones buscadas S. Al sistema obtenido le damos tal desplazamiento infinitesimal posible, con el que la traslación en la dirección del vínculo eliminado sea distinta de cero y componemos la ecuación de los trabajos de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema

$$\Sigma P_i \Delta_i + S\Delta_S = 0, \tag{2.2}$$

donde:

P_i es una de las fuerzas externas actuantes (expuesta en la fig. 19);

S la reacción incóngnita del vínculo;

Δ_i el desplazamiento en dirección de la fuerza P_i;

Δ_S el desplazamiento en dirección de la reacción incógnita del vínculo indispensable.

Dado que por la condición, el desplazamiento dado Δ_S no es igual a cero, entonces,

$$S = -\frac{\Sigma P_i \Delta_i}{\Delta_S}. \tag{2.3}$$

Por cuanto el principio de los desplazamientos posibles es la expresión más general de las condiciones de equilibrio, entonces la reacción del vínculo indispensable es estáticamente determinada. También es correcta la conclusión inversa: si la reacción del vínculo es estáticamente determinada, entonces, en los sistemas variantes e invariantes tal vínculo es indispensable.

Excluyamos ahora del sistema variante o invariante un vínculo superfluo. El sistema obtenido o en general no tiene posibles desplazamientos, o teniéndolos, el desplazamiento en dirección del vínculo eliminado es infaliblemente nulo. Esto significa, que la reacción del vínculo superfluo no puede ser determinada por el principio de los desplazamientos posibles, por lo cual es hiperestática.

La propiedad demostrada de las reacciones de los vínculos permite dar una definición cinemática de los sistemas estáticamente determinados e indeterminados, en lugar de la estática: *los sistemas invariantes (y variantes) que tienen solamente vínculos indispensables son estáticamente determinados y, los que tienen vínculos superfluos, hiperestáticos.*

Para simplificar la demostración de la hiperestaticidad de las reacciones de los vínculos ficticios de los sistemas de variabilidad instantánea, debidas a las cargas que ellos pueden equilibrar sin deformación del material ni desplazamientos infinitesimales de sus elementos, como cuerpos absolutamente rígidos, examinemos un sistema con sólo vínculos ficticios indispensables.

Eliminamos del sistema un vínculo ficticio indispensable y, transformándolo en variante, le damos un desplazamiento posible. Por cuanto en este caso, también es factible el equilibrio sin el vínculo ficticio, el trabajo de las fuerzas externas, invertido en el desplazamiento infinitesimal posible, con una exactitud de hasta valores infinitesimales de primer orden, es igual a cero. Con la misma exactitud, el desplazamiento Δ_S en dirección del vínculo excluido, también es igual a cero. Por eso, la reacción del vínculo indispensable ficticio es indeterminada. Esto significa que ésta es hiperestática.

Si la reacción del vínculo ficticio perteneciente al número de vínculos indispensables es hiperestática, entonces, tanto más lo será la reacción del vínculo ficticio perteneciente al número de los vínculos superfluos.

Si una carga no puede ser equilibrada por un sistema de variabilidad instantánea, entonces, en el primer momento, el equilibrio no es posible y el sistema se pone en movimiento. Pero en cuanto el sistema adquiere un desplazamiento infinitesimal, formalmente, puede llegar a ser invariante. Así, por ejemplo, tres barras que unen dos discos, que con anterioridad al desplazamiento infinitesimal del sistema se intersecaban en un punto, ahora pueden no cortarse en él (fig. 20), pero la tercera barra habrá de pasar infinitamente cerca

Fig. 20

del punto de intersección de las dos barras restantes. El equilibrio de tal sistema, formalmente, es factible sólo en el caso de que las reacciones de los vínculos sean infinitas, lo que se puede demostrar empleando el principio de los desplazamientos posibles, los cuales, con los vínculos reales, no pueden ser desarrollados. Para esto, excluimos el vínculo ficticio, tornamos al sistema variante y le imponemos desplazamientos infinitesimales posibles. Por cuanto según la condición, la carga, en la posición dada, no puede ser equilibrada por el sistema variante, entonces, la $\Sigma P_i \Delta_i$ no es igual a cero, sino que representa un valor infinitesimal del primer orden de pequeñez, al mismo

tiempo que el desplazamiento Δ_S, por la dirección del vínculo ficticio, es un infinitésimo de orden superior de pequeñez. Esto significa que la reacción del vínculo ficticio tiende al infinito.

Todo el razonamiento fue llevado a cabo para vínculos y discos absolutamente rígidos. El cuadro será algo diferente si se tiene en cuenta la deformación de discos y vínculos, así como también el juego en los vínculos, que de hecho tiene lugar. Debido a las deformaciones de los vínculos y discos, el desplazamiento del sistema señalado arriba proseguirá, las reacciones de los vínculos disminuirán y dejarán de ser infinitamente grandes. En algunos casos, sin quebrantar la resistencia de los propios vínculos, el equilibrio puede establecerse en estado deformado. Pero el sistema, en este caso, sufre grandes desplazamientos. En otros casos, si los vínculos, por la naturaleza de su material, no pueden desarrollar las reacciones requeridas para lograr el equilibrio, éste será imposible.

Las reacciones de los vínculos ficticios de los sistemas con variabilidad instantánea, debidas a las cargas equilibradas *sólo* en estado deformado, pueden ser determinadas únicamente en este mismo estado. Esto significa que las reacciones son hiperestáticas.

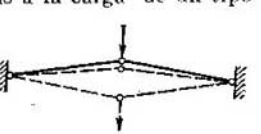
Prestemos atención al hecho de que, si en la posición indeformada dada, la carga puede ser equilibrada por el sistema de variabilidad instantánea, es indispensable distinguir las formas de equilibrio estables e inestables.

Si dos discos están ligados entre sí por tres o más barras paralelas, cuyas longitudes son iguales, el sistema de variabilidad instantánea pasa a ser variante con vínculos superfluos que no impiden su movimiento final.

§ 13. REACCION DE LOS VINCULOS EN LOS SISTEMAS DE VARIABILIDAD CASI INSTANTANEA. Los sistemas de variabilidad casi instantánea son sistemas invariantes, pero con una disposición de los vínculos próxima a aquella que tiene lugar en los sistemas de variabilidad instantánea.

Como fue ya demostrado, las reacciones de los vínculos de un sistema de variabilidad instantánea, debidas a la carga de un tipo

Fig. 21



arbitrario cualquiera, teniendo en cuenta las deformaciones del sistema, aún no siendo infinitamente grandes, son enormes. Para los discos, las reacciones de los vínculos son fuerzas externas. Si estas reacciones son muy grandes, entonces, las fuerzas internas en los elementos del disco también serán grandes. Para grandes fuerzas internas, se requiere un gran gasto de material.

Todo lo dicho se refiere también a los sistemas de variabilidad casi instantánea, que si bien son invariantes, como norma, exigen un

gran consumo de material y permiten considerables desplazamientos, es decir, son sistemas no rígidos. Por esta razón no se deben emplear.

Es necesario prestar atención al hecho de que en los sistemas de variabilidad casi instantánea existen casos en que la deformación del sistema modifica en medida considerable las reacciones de los vínculos en él (fig. 21). Tal sistema, con cierta configuración y determinado valor de la carga, puede poseer la propiedad de «salto», por lo que las barras comprimidas pasan a ser traccionadas.

§ 14. RELACIONES CUANTITATIVAS ENTRE DISCOS Y VÍNCULOS. Supongamos que tenemos una cantidad D de discos que deben ser unidos en un sistema único invariante (fig. 22).

Fig. 22

Si a uno de los discos lo tomamos como fijo, al que deben ser unidos los restantes $D - 1$ discos, entonces, es imprescindible eliminar con vínculos sus 3 $(D-1)$ grados de libertad con respecto al primer disco.

Admitamos que los discos están unidos con vínculos: del primer tipo, por barras en cantidad B; del segundo, con articulaciones en cantidad A y del tercero, es decir, por soldaduras, en cantidad S.

El número de grados de libertad que puede ser destruido por ellos, es igual a:

$$L^* = B + 2A + 3S.$$

Entre el número de grados de libertad destinado a destruir y el que puede ser eliminado con los vínculos, pueden haber distintas relaciones

$$3(D-1) \gtreqless B + 2A + 3S. \qquad (2.4)^1)$$

Para los sistemas fijos, en el primer miembro de la ecuación (2.4) es necesario agregar un tres, es decir, la cantidad de grados de libertad destinados a ser destruidos y en el segundo miembro de la ecuación, el número de vínculos a tierra complementarios V_{ap}. Después de esto, tendremos

$$3D \gtreqless B + 2A + 3S + V_{ap}. \qquad (2.5)$$

Si en (2.4) o (2.5) aparece el signo de desigualdad superior, entonces, el número de grados de libertad destinados a ser destruidos será mayor que el que pueden destruir los vínculos. Esto significa que el sistema es *variante*.

Para revelar más rápidamente los sistemas variantes, en primer lugar, es necesario tomar como discos las partes invariantes del sis-

[1]) La expresión (2.4) y las expresiones análogas a ella (2.6), (2.8) y (2.10) obtenidas más adelante, pueden ser utilizadas también para los sistemas fijos, si se incluye a la tierra en el número de discos y se considera a los vínculos de apoyo como comunes.

tema con vínculos superfluos, si éstos existen y si su descubrimiento no ofrece dificultad.

El grado de variabilidad (V) de un sistema se determinará por el número de vínculos que faltan entre los discos del mismo:

para los sistemas libres: $V = 3(D - 1) - B - 2A - 3S$; (2.6)

para los sistemas fijos: $V = 3D - B - 2A - 3S - V_{ap}$. (2.7)

Si en (2.4) o (2.5) aparece el signo de igualdad, entonces, los vínculos introducidos entre los discos son suficientes para que el sistema pueda ser invariante. De tales sistemas vamos a decir *que tienen suficiente cantidad de vínculos*. El signo de desigualdad inferior en (2.4) o (2.5) indica que entre los discos han sido introducidos más vínculos que los necesarios para formar un sistema invariante. *Estos serán sistemas con vínculos superfluos.*

Sin embargo, el número de vínculos suficiente, e incluso sobrante, aún no soluciona la cuestión sobre la variabilidad de un sistema, dado que los vínculos pueden estar incorrectamente distribuidos. En el caso de una disposición incorrecta de los vínculos, los sistemas pueden ser de variabilidad instantánea o variantes con vínculos superfluos. Sólo con una correcta distribución de los vínculos, el sistema será invariante, lo que se establece analizándolo cinemáticamente (§ 15). De esta manera, el signo de igualdad en (2.4) y (2.5), o el signo inferior de desigualdad en ellas, es solamente una condición *imprescindible* de invariabilidad, *pero no suficiente*. Sólo el signo superior en (2.4) y (2.5) determina inmediata e incondicionalmente al sistema variante. Por consiguiente, no es posible determinar la invariabilidad de un sistema por las fórmulas (2.4) y (2.5). Por ellas podemos establecer solamente si los vínculos son suficientes para que el sistema pueda ser invariante.

Si un sistema es invariante y en las fórmulas (2.4) o (2.5) aparece el signo de igualdad, entonces, todos los vínculos entre los discos del sistema son indispensables y sus reacciones, si se consideran los discos y los vínculos como absolutamente rígidos, son estáticamente determinadas. Por consiguiente, el sistema, con respecto a las reacciones de los vínculos, *es estáticamente determinado*.

En un sistema hay vínculos superfluos si, siendo éste invariante, en las fórmulas (2.4) o (2.5) aparece el signo de desigualdad inferior. Por consiguiente, el sistema *es hiperestático*.

El grado de hiperestaticidad o indeterminación estática de un sistema, que determina la cantidad de reacciones superfluas incógnitas de los vínculos entre los discos, además de las determinadas por las ecuaciones de la estática, es igual a la cantidad de vínculos superfluos (V_s):

para los sistemas libres: $V_S = B + 2A + 3S - 3(D - 1)$; (2.8)

para los sistemas fijos: $V_S = B + 2A + 3S + V_{ap} - 3D$. (2.9)

Si algunos discos son hiperestáticos, las fórmulas (2.8) y (2.9) dan una cantidad incompleta de las reacciones incógnitas superfluas

de los vínculos de todo el sistema. A ella es necesario agregar el número de reacciones hiperestáticas de los vínculos en los discos aislados. Por eso, para la determinación inmediata, por las fórmulas (2.8) y (2.9), del grado de hiperestaticidad completo de un sistema, es necesario considerar al sistema compuesto sólo por discos estáticamente determinados.

De (2.4) y (2.5) se pueden obtener expresiones más cómodas para los sistemas, en los cuales los discos, comprendiendo entre ellos también a las barras rectas, unidos entre sí con articulaciones, poseen no más de dos de ellas cada uno. A los lugares de unión de los discos los vamos a considerar nudos. Al número de nudos en el sistema lo designaremos con N y al de articulaciones, considerando la multiplicidad de ellas, con $2D - N$, por cuanto en cada nudo las articulaciones se cuentan en una unidad menor que los discos lindantes con él. Colocando $A = 2D - N$ en las fórmulas (2.4)—(2.5), obtenemos:

para los sistemas libres: $2N \gtreqless D + 3;$ (2.10)

para los sistemas fijos: $2N \gtreqless D + V_{ap}.$ (2.11)

§ 15. ANALISIS CINEMATICO DE LOS SISTEMAS. El análisis cinemático de los sistemas se realiza para juzgar sobre sus variabilidades. En los casos sencillos, éste se basa en las reglas de formación de los sistemas simples de dos y tres discos. Durante el análisis cinemático, en primer lugar es necesario establecer si los vínculos son suficientes para que el sistema sea invariante. Es cómodo hacerlo por medio de las fórmulas (2.4) y (2.5), por las cuales pueden, inmediatamente, ser revelados los sistemas evidentemente variantes con insuficiente

Fig. 23

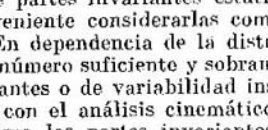
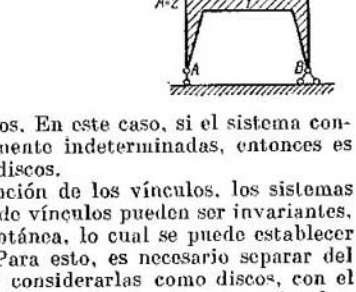


Fig. 24



número de vínculos entre los discos. En este caso, si el sistema contiene partes invariantes estáticamente indeterminadas, entonces es conveniente considerarlas como discos.

En dependencia de la distribución de los vínculos, los sistemas con número suficiente y sobrante de vínculos pueden ser invariantes, variantes o de variabilidad instantánea, lo cual se puede establecer *sólo* con el análisis cinemático. Para esto, es necesario separar del sistema las partes invariantes y considerarlas como discos, con el objeto de analizar la corrección de la unión de ellos con vínculos.

Examinemos el sistema expuesto en la fig. 23. Está claro que es variante, dado que el tercer disco está unido a él solamente por la articulación C y tiene, al mismo tiempo, una cantidad excedente de vínculos. En efecto, en él hay tres discos, 2 barras, 2 articulaciones y 4 vínculos de apoyo. Con estos datos, por la fórmula (2.5) tenemos que

$$3 \cdot 3 < 2 + 2 \cdot 2 + 4.$$

Por consiguiente, en el sistema hay un vínculo demás. Pero los vínculos están distribuidos incorrectamente. Dos discos y la tierra están unidos entre sí por tres articulaciones A, B y C, no pertenecientes a una misma recta y, por consiguiente, forman un sistema invariante. Pero, además, éstos están unidos entre sí aún por dos barras ab y cd, en lugar de una sobrante, determinada por el cálculo matemático. He aquí por qué el tercer disco resultó insuficientemente fijado.

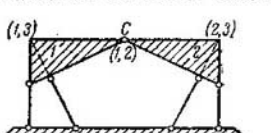
En la fig. 24 está representado un sistema de tres discos, dos barras, dos articulaciones y tres vínculos de apoyo. Por la fórmula (2.5)

$$3 \cdot 3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3.$$

Con la cantidad de vínculos dada, el sistema puede ser invariante, lo cual da motivo para proseguir el análisis. El primer disco está sujeto a tierra por tres vínculos en forma de un apoyo fijo y otro rodante. Tal fijación es invariante. Al primer disco está unido el segundo por medio de la articulación C y la barra ab, que no pasa por la articulación. Tal unión también es invariante. El tercer disco

Fig. 25

Fig. 26



está unido a los dos primeros con la misma articulación C y la barra cd, que no pasa a través de la articulación. El sistema es invariante y, por cuanto en la fórmula (2.5) tiene lugar la igualdad, estáticamente determinado.

El sistema representado en la fig. 25 posee 5 discos, 9 barras, una articulación y tres vínculos de apoyo. Por la fórmula (2.5)

$$3 \cdot 5 > 9 + 2 \cdot 1 + 3.$$

El sistema es variante.

En la fig. 26 se expone un sistema libre, en el cual hay 3 discos, 4 barras y una articulación. Por la fórmula (2.4)

$$3\,(3 - 1) = 4 + 2 \cdot 1.$$

El sistema puede ser invariante. Es indispensable un análisis complementario. En este sistema los tres discos están unidos por la articulación C y cuatro barras, que por parejas constituyen los

centros instantáneos de rotación de los discos (*1*, *3*) y (*2*, *3*), dispuestos en una recta con la articulación *C*, la cual representa el centro instantáneo de rotación de los discos (*1*, *2*). El sistema es de variación instantánea.

Es necesario prestar atención al hecho de que por el análisis cinemático de los sistemas, los de variabilidad instantánea son los más difíciles de revelar, porque al ser casi invariantes, equívocamente se les puede tomar por invariantes. En relación con esto, además del análisis cinemático directo de la unión de los discos, más adelante (capítulo 4) van a ser indicados unos procedimientos especiales para revelar tales sistemas.

Con el análisis cinemático de los sistemas, la variabilidad instantánea se determina por los siguientes signos:

1) dos discos están unidos por tres y más barras que se cortan en un mismo punto;

2) dos discos están unidos por una articulación y una barra que atraviesa a la articulación;

3) tres discos están unidos de dos en dos solamente por articulaciones o por dos y más barras que se cortan en un mismo punto, además, las articulaciones y los puntos de intersección de las barras se encuentran en una misma recta. En el caso particular, el nudo articulado está unido a un sistema invariable por medio de dos barras dispuestas en una recta.

Examinemos unos cuantos ejemplos.

Ejemplo 1. El sistema está representado en la fig. 27. En él hay 6 discos, 2 barras, 5 articulaciones y 6 vínculos de apoyo. Por la fórmula (2.5)

$$3 \cdot 6 = 2 + 2 \cdot 5 + 6.$$

El sistema puede ser invariante. Examinemos su invariabilidad así. Los dos primeros discos y el disco — tierra están unidos entre sí por tres articula-

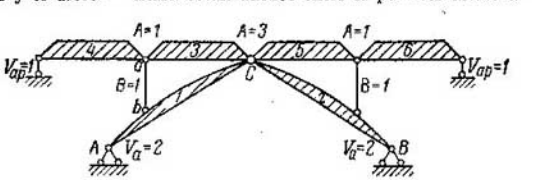


Fig. 27

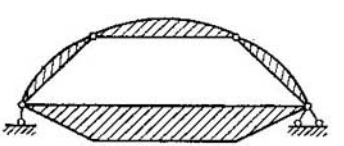
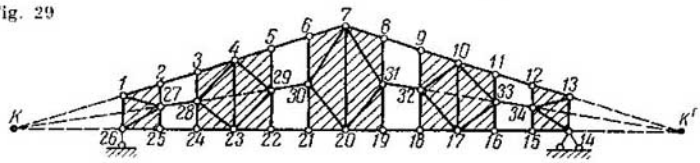


Fig. 28

ciones *A*, *B* y *C*, no dispuestas en una misma recta. A ellas está unido el tercer disco por la articulación *C* y la barra *ab*, que no pasa a través de la articulación. El cuarto disco está unido al sistema por la articulación *a* y

la barra de apoyo a tierra. El quinto y sexto discos están unidos análogamente. El sistema es invariante y, con respecto a las reacciones de los vínculos, estáticamente determinado. Todos los vínculos son indispensables.

Fig. 29



Ejemplo 2. El sistema está representado en la fig. 28. En él hay: 4 discos, 4 nudos y 3 vínculos de apoyo. Los discos están unidos sólo por articulaciones y cada uno posee sólo dos de ellas. Por la fórmula (2.11)

$$2 \cdot 4 > 4 + 3.$$

El sistema es variante.

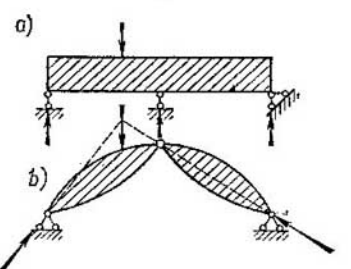
Ejemplo 3. El sistema está representado en la fig. 29. En él hay: 34 nudos, 65 discos (en el caso dado son barras) y 3 vínculos de apoyo. Por la fórmula (2.11)

$$2 \cdot 34 = 65 + 3.$$

El sistema puede ser invariante. En la figura, los campos del sistema, compuestos por los triángulos sombreados, representan discos invariantes. Los discos vecinos están unidos entre sí por tres barras que se cortan en un mismo punto. El sistema es de variabilidad instantánea.

§ 16. CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS PLANOS. En la mecánica de construcción, la clasificación de los sistemas por diferentes indicios, considera sólo las particularidades principales de la mayoría de los sistemas de una clase dada y, por eso, no es del todo rigurosa y perfecta. Siempre pueden ser hallados algunos casos particulares que se apartarán de ella. Por el número de vínculos y su distribución, ante todo, los sistemas se dividen en invariantes, de variabilidad instantánea y variantes. Los primeros, a su vez, se subdividen según los vínculos, en estáticamente determinados, con sólo vínculos indispensables, e hiperestáticos, con vínculos superfluos.

Fig. 30



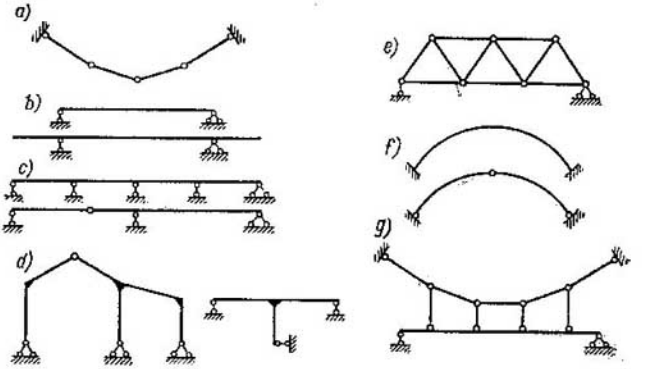


Fig. 31

Por su construcción, los sistemas se dividen en simples y complejos. Simples, son aquellos cuya formación se puede estudiar por las reglas de unión de dos y tres discos. Los restantes son complejos.

En el caso de cargas verticales, se usa dividir a los sistemas, por el carácter de las reacciones de apoyo, en sin tirantes y con ellos [2].

Sin tirantes, son los sistemas en los cuales la carga vertical origina sólo reacciones de apoyo verticales (fig. 30, *a*).

Con tirantes, son los sistemas en los que la carga vertical origina reacciones inclinadas (fig. 30, *b*).

Por el carácter de los vínculos de apoyo, independientemente de la carga, a los sistemas se los puede dividir en: *de viga, en arco y otros.*

Los *sistemas de viga*, son aquellos en los que la fuerza P de una sola dirección, en cualquier posición, en el sistema origina reacciones de apoyo paralelas a sí misma, como, por ejemplo, en los discos fijos a tierra con apoyos fijo y rodante. Dentro de los sistemas de viga se incluyen los sistemas sin tirantes.

Sistemas en arco son los que tienen no menos de dos apoyos fijos, no poseedores de las propiedades de los sistemas de viga. Dentro de los sistemas en arco se incluyen los sistemas con tirantes.

Los *otros sistemas* son los restantes.

Por el carácter de sus vínculos, los sistemas lineales se dividen en: cadenas articuladas, vigas, marcos, armaduras y sistemas mixtos.

Las *cadenas articuladas* son sistemas variantes, compuestos por barras o discos unidos sucesivamente entre sí con articulaciones (fig. 31. *a*). En el caso de carga nodal, las barras rectas de la cadena trabajan a la tracción si la convexidad de la cadena está dirigida hacia el lado de la acción de la carga y, a la compresión, si su convexidad está dirigida en sentido opuesto a la acción de la carga.

Las *vigas* representan una o varias barras rectas que descansan sobre apoyos apropiados al sistema de viga, sucesivamente unidas

entre sí por los extremos (fig. 31, *b*, *c*) y que trabajan fundamentalmente a la flexión.

Los *marcos* son sistemas compuestos por barras rectas, quebradas y algunas curvas, unidas rígidamente entre sí por los extremos y, a veces, parcialmente articuladas (fig. 31, *d*). Estos pueden ser, tanto sistemas de arco, como de viga. Los elementos verticales o casi verticales de los marcos son llamados *pendolones* y, los horizontales o casi horizontales, *vigas*. Estos elementos trabajan a la flexión con tracción o con compresión.

Las *armaduras articuladas* son sistemas invariantes de uno o varios discos, formados con barras rectas, unidas por los extremos con articulaciones (fig. 31, *e*). Pueden ser tanto sistemas de viga como de arco. Las barras ubicadas en el contorno de la armadura, aparte de las verticales y casi verticales, se llaman de cabeza y forman los cordones inferior y superior. Las barras colocadas en el interior del contorno forman la celosía y se llaman riostras o diagonales y montantes o pendolones. Riostras o diagonales se denominan los elementos inclinados, y montantes o pendolones, los verticales o aproximadamente verticales.

Los sectores entre los nudos vecinos de los cordones de la armadura se llaman paneles y, sus longitudes, por lo conún, se miden horizontalmente. Las barras de las armaduras articuladas, en el caso

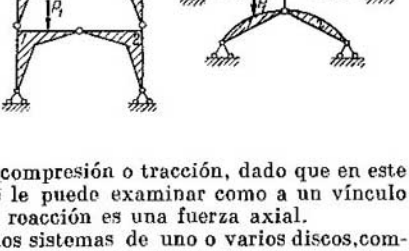


Fig. 32

de carga nodal, trabajan a la compresión o tracción, dado que en este caso a cualquiera de ellas se le puede examinar como a un vínculo interno de primer tipo, cuya reacción es una fuerza axial.

Armaduras se llaman a los sistemas de uno o varios discos, compuestos por barras rectilíneas, unidas entre sí por los extremos, bien sólo rígidamente, bien con rigidez y articulación parcial, en los que la sustitución de los nudos rígidos por articulaciones los transforma en armaduras articuladas. Las barras de una armadura con carga nodal trabajan fundamentalmente a la tracción o a la compresión, con flexión complementaria, a cuenta de la rigidez de los nudos.

Los *arcos* son sistemas con diagonales, compuestos por barras encorvadas (fig. 31, *f*), la convexidad de las cuales está dirigida al encuentro de la acción de la carga. Los arcos trabajan a la compresión y flexión. Si la barra encorvada está orientada con la convexidad

hacia el lado de acción de la carga, entonces, el sistema es llamado de suspensión o colgante y trabaja a la tracción y flexión.

Los *sistemas mixtos* están compuestos por una combinación de algunos de los sistemas mencionados anteriormente, unidos entre sí para que trabajen en conjunto. En la fig. 31, *g* se presenta un sistema que es una combinación de viga y cadena.

§ 17. ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS MIXTOS. Entre los sistemas estáticamente determinados se destacan los *sistemas mixtos*, en los cuales, partes aisladas sirven como base de apoyo para otras partes. A tales elementos aislados los vamos a llamar partes *básicas* del sistema mixto y a los que se apoyan en ellos, partes *complementarias*. Las partes básicas de un sistema invariante mixto permanecen invariantes después de quitar las partes complementarias, pero las partes complementarias sin las básicas se vuelven variantes.

Algunas de las partes que entran en el sistema mixto pueden desempeñar un doble papel. En relación a unas partes serán básicas y, con respecto a otras, complementarias. Así, por ejemplo, los discos *3* y *4* (fig. 32) forman un sistema, el cual, con respecto al sistema de los discos *1* y *2*, es una parte complementaria y, al de los discos *5* y *6*, básica.

Los sistemas mixtos estáticamente determinados poseen la propiedad de que las cargas ubicadas en las partes básicas (las fuerzas P_1 en la fig. 32), no originan fuerzas internas en las partes complementarias que se apoyan en ellas, ni reacciones de los vínculos, mientras que las cargas ubicadas sobre las partes complementarias (las fuerzas P_2), originan fuerzas internas en los elementos de las partes básicas y reacciones de los vínculos. Esta tesis se demuestra fácilmente a base del principio de los desplazamientos posibles. Por este principio, al determinar las reacciones de los vínculos en las partes complementarias, es imprescindible excluir el vínculo cuya reacción se determina, dar al sistema un posible desplazamiento y componer la ecuación de los trabajos. Dado que, en este caso, la parte básica permanece invariante, entonces, ésta no tiene desplazamientos y, por consiguiente, el trabajo de las cargas ubicadas sobre la misma es siempre igual a cero. Por lo tanto, también la reacción determinada debida a la carga dispuesta en la parte básica es igual a cero. Al determinar las reacciones de la parte básica, es indispensable excluir de ella aquel vínculo cuya reacción se determina y comunicarle también al sistema un desplazamiento posible. Por cuanto la parte complementaria se apoya en la básica, entonces, como norma, también ella tendrá desplazamientos dentro del desplazamiento posible del sistema. Por eso, es posible que el trabajo de las fuerzas aplicadas a la parte complementaria no sea igual a cero, y, por consiguiente, en este caso, puede no ser nula la reacción incógnita del vínculo de la parte básica.

Todo lo dicho nos indica, que, frecuentemente, es cómodo realizar el cálculo de los sistemas mixtos en el orden contrario a su formación, desde las partes complementarias a las básicas. Con otras palabras, primero se calculan las partes complementarias y luego las básicas.

CALCULO DE SISTEMAS ESTATICAMENTE DETERMINADOS

CAPITULO III * METODOS PRINCIPALES DE CALCULO DE SISTEMAS INVARIANTES PLANOS, ESTATICAMENTE DETERMINADOS CON CARGA FIJA

§ 18. CONSIDERACIONES GENERALES. El cálculo de estructuras cualesquiera se reduce, al fin de cuentas, a determinar las fuerzas internas en sus elementos. Estas dependen de todas las fuerzas externas actuantes sobre estos elementos.

Fuerzas externas, con relación a un elemento aislado de una estructura, son tanto las cargas dadas que actúan directamente sobre él como las reacciones, sujetas a determinación, de los vínculos, con los cuales este elemento está unido a los restantes. A las fuerzas internas, en la sección transversal de una barra, se les puede examinar también como reacciones de vínculos, si la unión de las dos partes de una misma barra por esta sección se considera convencionalmente que ha sido hecha por medio de soldadura. Por fin, las reacciones de apoyo de un sistema son reacciones de vínculos. Por eso, los métodos de cálculo de los sistemas son, fundamentalmente, métodos de determinación de las reacciones de los vínculos.

Lo más frecuente es que en un sistema se efectúe la determinación de las reacciones de los vínculos, de las reacciones de los apoyos y de las fuerzas internas por el esquema del sistema no deformado. Recordamos nuevamente que, a consecuencia de esto, en los sistemas estáticamente determinados, para cargas dadas, las fuerzas internas no dependen ni del material, ni de las secciones transversales de los elementos, ni tampoco de en qué fase de trabajo se encuentra la estructura, en la elástica o en la elástico-plástica. Las fuerzas internas dependen del material y de las secciones transversales de los elementos sólo cuando se calculan a base del peso propio desconocido, por cuanto el mismo, en las estructuras correctamente proyectadas, se determina por las fuerzas internas y las propiedades del material. Se dice que un vínculo trabaja, cuando su reacción es distinta de cero y que no trabaja, cuando es igual a cero.

§ 19. METODO ESTATICO DE DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES DE LOS VINCULOS

1. DETERMINACION ANALITICA DE LAS REACCIONES DE LOS VINCULOS

La determinación analítica de las reacciones de los vínculos, se efectúa por las ecuaciones de equilibrio en el plano, susceptibles de ser escritas de diferentes maneras:

1) $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M_{C_1} = 0$; los ejes x e y no son paralelos;

2) $\sum X = 0$; $\sum M_{C_1} = 0$; $\sum M_{C_2} = 0$, los puntos C_1 y C_2 no deberán estar sobre una misma perpendicular al eje x (fig. 33, *a*);

3) $\sum M_{C_1} = 0$; $\sum M_{C_2} = 0$; $\sum M_{C_3} = 0$, los puntos C_1, C_2, y C_3 no deberán pertenecer a una misma línea recta (fig. 33, *b*).

Las condiciones restrictivas de las variantes de escritura de las

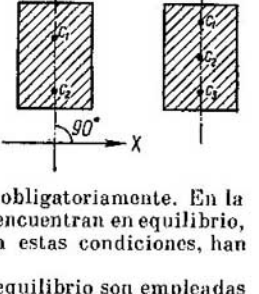


Fig. 33

ecuaciones de equilibrio deberán observarse obligatoriamente. En la fig. 33 se muestran casos de cuerpos que no se encuentran en equilibrio, aún cuando sus ecuaciones de equilibrio, sin estas condiciones, han sido satisfechas.

Durante los cálculos, las ecuaciones de equilibrio son empleadas de distintos modos. Al mismo tiempo, es útil tener en cuenta, que las reacciones de un disco *no cargado*, sujeto con dos articulaciones, pasan a través de estas articulaciones, lo cual se desprende del examen del equilibrio de tal disco, separándolo del sistema. Por consiguiente, al determinar las reacciones de los vínculos, para simplificar, tal disco sin carga puede ser sustituido por una barra recta que pasa por dos articulaciones del mismo.

Método de cortes o seccionamientos simples

El método de cortes o seccionamientos simples consiste en dividir al sistema, con una sección que pasa por los vínculos, en dos partes independientes, sustituyéndose las acciones de cada una de ellas sobre la otra con las reacciones incógnitas de los vínculos, determinables por las ecuaciones de equilibrio de *cualquiera* de las partes. Las direcciones de las reacciones de los vínculos en los cortes se fijan

arbitrariamente. El signo positivo de la reacción encontrada nos indica que su dirección, tomada arbitrariamente, coincide con la real y, el negativo, que es contraria. En las barras seccionadas, usualmente se acostumbra a considerar que las reacciones son positivas y presentarlas en el dibujo de extensión (fig. 34, *a*).

En adelante, para simplificar la representación en el dibujo, convencionalmente, en la sección vamos a mostrar la reacción de la barra sólo con flechas dirigidas desde el nudo (fig. 34, *b*).

Por el método de los cortes simples, en los vínculos seccionados con el corte se pueden determinar sólo tres reacciones incógnitas (en la fig. 34, todas las reacciones), empleando para esto las tres condiciones de equilibrio, de acuerdo a una de las variantes indicadas más arriba.

Al elegir la variante de las ecuaciones de equilibrio es indispensable tender a que el problema planteado se resuelva de la forma más

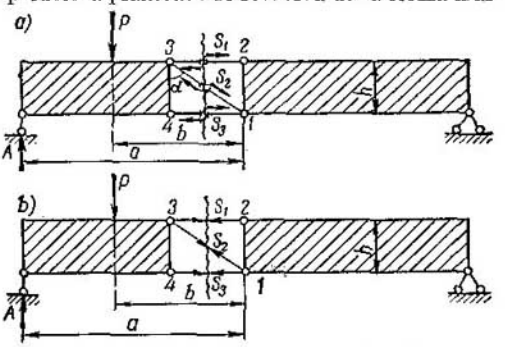


Fig. 34

sencilla. La solución más simple será aquella, en la cual cada ecuación de equilibrio contenga una sola incógnita. Esto es lo que debemos procurar obtener al componer las ecuaciones de equilibrio. Habiendo en una sección sólo tres incógnitas, siempre es posible repartirlas entre las ecuaciones. Así, por ejemplo, al determinar la reacción del vínculo S_1 (fig. 34), deberemos excluir de la ecuación de equilibrio las otras dos incógnitas S_1 y S_3. Esto se puede hacer, si componemos la ecuación de equilibrio en forma de suma de los momentos de todas las fuerzas actuantes sobre una cualquiera de las dos partes, con respecto al punto de intersección de las otras dos fuerzas S_2 y S_3, o sea, al punto 1, por cuanto los momentos de estas fuerzas con respecto al punto indicado son iguales a cero.

La ecuación de equilibrio que contenga sólo a la fuerza incógnita S_1 será

$$\sum M_1^{izq} = 0 \quad \text{ó} \quad \sum M_1^{der} = 0.$$

La primera en forma desarrollada es

$$\sum M_1^{izq} = Aa - Pb + S_1 h = 0,$$

de donde

$$S_1 = -\frac{Aa - Pb}{h}.$$

El signo negativo del valor encontrado de la reacción del vínculo significa que su dirección no estaba correctamente indicada en la figura. Análogamente, al determinar la reacción del vínculo S_3, se deberá tomar como centro de momentos el punto de intersección de las otras dos fuerzas S_1 y S_2, esto es, el punto 3. Al determinar la reacción del vínculo S_2, se deberá tomar como centro de momentos el punto de intersección de las fuerzas S_1 y S_3. Si estas últimas resultaran paralelas, como en nuestro caso, entonces, en lugar de componer la ecuación de equilibrio en forma de la suma de los momentos con respecto a algún punto, se deberá componer como la suma de proyecciones de las *fuerzas sobre el eje perpendicular a las fuerzas paralelas* S_1 y S_3, para poder excluirlas de la ecuación de equilibrio. Para el sistema representado en la fig. 34, tal eje será el vertical y la ecuación de equilibrio tomará el aspecto

$$\sum Y^{izq} = A - P - S_2 \cos \alpha = 0,$$

de donde

$$S_2 = \frac{A - P}{\cos \alpha}.$$

De esta manera, por una sección, en la que no hay más de tres fuerzas incógnitas, no siendo concurrentes, éstas siempre pueden ser determinadas por ecuaciones, en cada una de las cuales habrá sólo una fuerza incógnita.

Si se calcula un sistema invariante y cada incógnita se determina de una ecuación de equilibrio, entonces, las limitaciones indicadas más arriba no se extienden sobre ninguna ecuación, independientemente de la forma de su escritura.

Método de cortes o seccionamientos conjuntos.

Si la sección que divide a un sistema en dos partes contiene más de tres reacciones incógnitas de los vínculos, por esta sola sección no se puede determinar a todas, dado que éstas son más que las ecuaciones independientes de equilibrio factibles de ser compuestas.

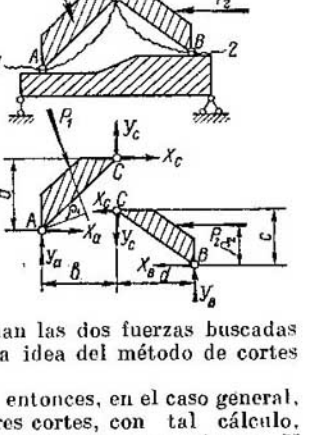
En tales casos, se tendrán que efectuar varios cortes, por eso, precisamente, el propio método se llama de cortes o seccionamientos conjuntos. En este caso, es necesario tender a que las secciones permitan componer tales ecuaciones independientes, que contengan cierto número (es de desear el menor) de incógnitas que pueden ser determinadas por estas ecuaciones. Como norma, por una sección que contenga más de tres incógnitas, de una ecuación suelta, independientemente de otras incógnitas, no se puede determinar ninguna de ellas. Esto sólo es factible en casos particulares y con respecto a una sola incógnita.

Para obtener un sistema de ecuaciones que permitan la determinación de cierto número de incógnitas, es indispensable efectuar

los cortes conjuntos de tal modo, que cada uno de ellos divida, necesariamente, a aquellos vínculos cuyas reacciones se exige determinar de las ecuaciones constituidas.

Así, por ejemplo, para determinar dos fuerzas en la articulación C (fig. 35) es indispensable, a través de ella, efectuar dos cortes, uno por las articulaciones C y A y el otro por las C y B. Esto permite destacar dos discos del sistema y examinar las condiciones de su equilibrio. Estas últimas deberán estar compuestas de tal modo, que en ellas entren sólo las fuerzas incógnitas de la articulación C, sujetas a determinación. Esto es fácil de hacer, si para el disco izquierdo componemos la ecuación de equilibrio en forma de la suma

Fig. 35



de los momentos con respecto a la articulación A, con lo que excluimos del examen a las fuerzas X_A e Y_A y, para el derecho, análogamente, componemos la condición de equilibrio en forma de la suma de los momentos con respecto al punto B, es decir:

para el disco izquierdo: $\Sigma M_A = X_C a - Y_C b + P_1\rho_1 = 0$;

para el disco derecho: $\Sigma M_B = -X_C \cdot c - Y_C d - P_2\rho_2 = 0$

De estas dos ecuaciones se determinan las dos fuerzas buscadas en la articulación C. En esto consiste la idea del método de cortes conjuntos.

Si en la sección hay cinco incógnitas, entonces, en el caso general, tendremos que efectuar no dos, sino tres cortes, con tal cálculo, que determinemos tres incógnitas de tres ecuaciones conjuntas. Y así sucesivamente.

Es necesario tener en cuenta que, al componer las condiciones de equilibrio, siempre es posible elegir tal variante de ecuación, en la cual no se incluyan dos de las reacciones incógnitas de la sección dada.

En la forma general, el sistema de ecuaciones lineales del procedimiento de secciones conjuntas puede ser escrito así:

$$\begin{aligned} a_{11}S_1 + a_{12}S_2 + \ldots + A_{1P} &= 0; \\ a_{21}S_1 + a_{22}S_2 + \ldots + A_{2P} &= 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}S_1 + a_{n2}S_2 + \ldots + A_{nP} &= 0, \end{aligned} \qquad (3.1)$$

donde a_{ik} es el coeficiente de la reacción incógnita S_k en la i-ésima ecuación de equilibrio y A_{iP}, el miembro libre en ella.

Las reacciones de los vínculos buscadas se determinan de (3.1) por medio de los determinantes

$$S_i = D_i : D, \tag{3.2}$$

donde

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad D_i = -\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & A_{1p} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & A_{2p} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & A_{np} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Procedimiento de recorte de nudos

El procedimiento de recorte de nudos se utiliza durante el cálculo de armaduras articuladas con cargas nodales y se basa en un sucesivo recorte de los nudos. En la armadura articulada, cada barra se puede examinar como vínculo de primer tipo, con una fuerza longitudinal en ella. Por eso, en el nudo recortado de una armadura articulada convergen tantas fuerzas, cuantas barras concurrían en él. Para cada nudo recortado se pueden componer sólo dos ecuaciones de equilibrio independientes, comúnmente, en forma de la suma de las proyecciones sobre dos ejes no paralelos. El procedimiento sólo es cómodo cuando en el nudo recortado no hay más de dos incógnitas. En tal caso, se hace posible la división de ellas en las ecuaciones, para lo cual es indispensable tomar como ejes de proyección de las fuerzas los ejes perpendiculares a las fuerzas buscadas.

Si estas últimas en el nudo son más de dos, entonces la determinación directa de ellas de un solo nudo recortado no es posible y hay que recurrir al recorte de varios nudos en conjunto. En este caso, las ecuaciones que se obtienen son del tipo (3.1).

En las armaduras articuladas simples, el cálculo de las fuerzas longitudinales en las barras, siempre se puede comenzar recortando el nudo con dos de ellas y luego, sucesivamente, pasar al seccionamiento de los nudos que no contengan más de dos fuerzas incógnitas en las otras barras. Con tal orden, cada vez es posible obtener dos ecuaciones independientes para la determinación de dos fuerzas incógnitas.

El método de recorte de nudos también puede ser utilizado en los sistemas constituidos por discos unidos entre sí con articulaciones, si los discos contiguos al nudo articulado no están cargados, por cuanto las reacciones en un disco no cargado están dirigidas por una línea recta, que pasa por las articulaciones que unen los discos al sistema.

2. DETERMINACION GRAFICA DE LAS REACCIONES DE LOS VINCULOS

La determinación gráfica de las reacciones de los vínculos se basa en las conocidas reglas de la estática gráfica: cualquier fuerza puede ser descompuesta en dos componentes cualesquiera que se

crucen con ella en un mismo punto, y en tres, que no se intersequen en un mismo punto y, también, en una componente y una fuerza que pase a través de un punto dado.

§ 20. METODO DE SUSTITUCION DE VINCULOS. El método de sustitución de los vínculos consiste en que el cálculo del sistema dado se efectúa por medio de otro sistema más simple, obtenido de aquél con la sustitución de los vínculos. A tal sistema transformado lo vamos a llamar *sustituyente*. Al pasar del sistema dado al sustituyente, parte de los vínculos se eliminan y, en su lugar, se coloca igual cantidad de vínculos nuevos, de modo que el sistema sea nuevamente invariante. El número de vínculos eliminados y agregados deberá ser tal, que el sistema sustituyente sea más simple y las reacciones de sus vínculos se determinen por el procedimiento de seccionamientos simples o el recorte de nudos. La acción de los vínculos sustituidos sobre el sistema sustituyente, es suplantada por sus reacciones. De este modo, el sistema sustituyente quedará cargado no sólo con la carga prevista, sino también con las reacciones incógnitas de los vínculos eliminados del sistema dado. Por cuanto en este último no existen aquellos vínculos que fueron colocados para la formación del sistema sustituyente, entonces, de la condición de equivalencia estática entre un sistema y otro, es indispensable admitir, que las reacciones en los vínculos agregados son iguales a cero. Entonces, en los sistemas dado y sustituyente, las reacciones respectivas de los vínculos serán iguales.

Aclaremos todo lo dicho con un ejemplo (fig. 36). El sistema sustituyente lo obtenemos eliminando del dado (fig. 36, *a*) todos los montantes, colocando en lugar de ellos las articulaciones A, B y C y añadiendo los vínculos de primer tipo (barras) ab y cd (fig. 36, *b*). La acción de los vínculos eliminados la sustituimos con las fuerzas incógnitas $X_1, \ldots, X_n$. Después es indispensable componer, en la forma general, la expresión de las reacciones de cada vínculo e igualarla a cero. Así obtenemos tantas ecuaciones lineales, cuantas reacciones incógnitas de los vínculos eliminados haya, las cuales se determinan precisamente de estas ecuaciones.

Componemos, en la forma general, la expresión de la reacción del k-ésimo vínculo agregado al sistema sustituyente y la igualamos a cero.

Introducimos, previamente, las siguientes designaciones:

r_{km} es la reacción del k-ésimo vínculo (fuerza o momento, en dependencia del tipo de vínculo), debida a la fuerza X_m, que corresponde a la unidad de esta fuerza, con la dimensión inherente a ella;

R_{kp} es la reacción del k-ésimo vínculo debida a la carga dada.

Ahora, utilizando el principio de independencia de acción de las fuerzas obtenemos

$$r_{k1}X_1 + r_{k2}X_2 + \ldots + r_{kn}X_n + R_{kp} = 0. \qquad (3.3)$$

Esta es la k-ésima ecuación canónica del método de sustitución de vínculos. Por ella, suponiendo que sucesivamente $k = 1, 2, 3, \ldots$

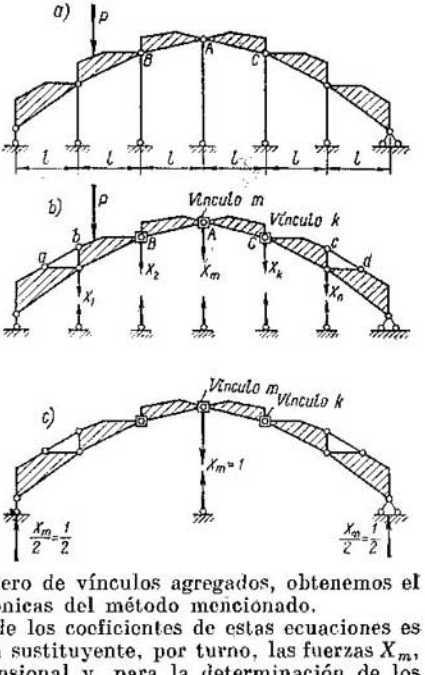


Fig. 36

. . ., n, donde n es el número de vínculos agregados, obtenemos el sistema de ecuaciones canónicas del método mencionado.

Para la determinación de los coeficientes de estas ecuaciones es necesario aplicar al sistema sustituyente, por turno, las fuerzas X_m, iguales a la unidad adimensional y, para la determinación de los miembros libres, *sólo* la carga dada. Así, por ejemplo, por las fuerzas $X_m = 1$ (fig. 36, *c*) se determinan los coeficientes r_{1m}, r_{2m}, . . ., r_{nm}. En particular, $r_{nm} = \frac{1}{2}\ 3l$ y $r_{km} = \frac{1}{2}\ 2l$.

Una vez determinadas las reacciones de los vínculos eliminados X_1, . . ., X_n, las reacciones S_i de los otros vínculos del sistema se hallan por la expresión análoga a (3.3), compuesta también a base pel principio de superposición

$$S_i = \overline{S}_{i1}X_1 + \overline{S}_{i2}X_2 + \ldots + \overline{S}_{in}X_n + S_{ip}, \qquad (3.4)$$

donde

$\overline{S}_{in}$ es la reacción incógnita del vínculo i, en el sistema sustituyente, debida a la reacción unitaria $X_k = 1$ del vínculo eliminado k.

S_{ip} la reacción incógnita del vínculo i, en el sistema sustituyente, debida a la carga.

El método de sustitución de vínculos se utiliza para calcular los sistemas complejos, cuando éstos no pueden ser calculados por los

métodos de seccionamientos simples y de recorte de nudos, si este último permite determinar cada reacción por la ecuación de equilibrio independiente de los nudos recortados sucesivamente.

§ 21. METODO CINEMATICO DE DETERMINACION DE LAS REACCIONES DE LOS VINCULOS. El método cinemático de determinación de las reacciones de los vínculos se basa en el empleo de las leyes de equilibrio de los sistemas variantes. Su idea consiste en que el sistema invariante, con la eliminación del vínculo indispensable, cuya reacción se determina, se transforma en monovariante, a veces llamado mecanismo, respecto al cual se utiliza el principio de los posibles desplazamientos.

La reacción incógnita del vínculo se aplica al sistema variante en calidad de fuerza externa. Por cuanto sobre este sistema van a actuar la carga dada y la reacción incógnita del vínculo eliminado, entonces, la condición de equilibrio, compuesta por el principio de los desplazamientos posibles (2.2), contendrá siempre una sola incógnita. En esto consiste la ventaja del método cinemático. El principio de los desplazamientos posibles se aplica en distintas variantes, que determinan diferentes procedimientos del método cinemático.

1. UTILIZACION DIRECTA DEL PRINCIPIO DE LOS POSIBLES DESPLAZAMIENTOS

Al sistema variante se le comunica un posible desplazamiento y se compone la ecuación de los trabajos posibles (2.2)

$$\sum P_i \Delta_i + S\Delta_S = 0.$$

Si al sistema se le aplican los momentos externos M, entonces, a (2.2) se le agrega $\Sigma M_i \Delta_i$, donde Δ_i es el correspondiente ángulo de giro infinitesimal del disco, al cual está aplicado el momento M_i, dentro del posible desplazamiento dado. Los posibles movimientos angulares Δ_i y Δ_S se determinan, en el diagrama de los posibles desplazamientos, con los giros de los discos correspondientes.

Los desplazamientos de traslación Δ_i y Δ_S pueden ser determinados como el producto de la longitud de la perpendicular bajada desde el centro instantáneo de rotación (polo) del disco k, en el desplazamiento posible comunicado, en la dirección de las fuerzas P_i o S aplicadas a este disco, por su ángulo de giro $d\varphi_k$ en aquel mismo

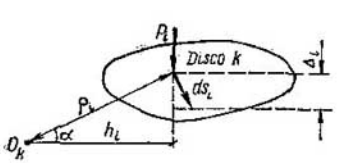


Fig. 37

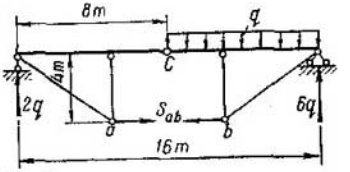


Fig. 38

desplazamiento posible. Esta regla es fácil de demostrar (fig. 37)

$$ds_i = \rho_i\, d\varphi_k;\ \Delta_i = ds_i \cos\alpha = \rho_i d\varphi_k \cos\alpha = h_i d\varphi_k,$$

donde $d\varphi_k$ es el ángulo de giro del disco en el desplazamiento dado.

Ejemplo 4. Determinar la reacción en el vínculo *ab* (fig. 38).

Eliminamos la barra *ab* del sistema y su acción la sustituimos con fuerzas. Para más comodidad, separamos al sistema de la tierra y tomamos las reacciones en los apoyos como fuerzas externas. El posible desplazamiento lo comunicamos en forma de rotación de la parte izquierda, alrededor de la articulación C en un ángulo infinitesimal $d\varphi$ en sentido de las agujas del reloj, dejando a la parte derecha fija.

Componemos la ecuación (2.2)

$$2q8d\varphi - S_{ab}4d\varphi = 0,$$

de donde

$$S_{ab} = 4q.$$

2. PROCEDIMIENTO DE LOS PUNTOS REPRESENTATIVOS

El vector de velocidad está dirigido por la tangente a la trayectoria. Por eso podemos escribir

$$ds_i = v_i dt,$$

donde

v_i es la velocidad del punto de aplicación de la fuerza P_i:
y t el tiempo.

A continuación, presentamos la expresión general del principio de los posibles desplazamientos en la siguiente forma:

$$\Sigma P_i ds_i \cos(P_i, v_i) = \Sigma P_i v_i\, dt \cos(P_i, v_i) = 0.$$

Luego de simplificar por dt obtenemos

$$\Sigma P_i v_i \cos(P_i, v_i) = 0. \qquad (3.5)$$

Ahora examinemos cierta fuerza P_i aplicada en el punto k_i. La velocidad y el centro instantáneo de rotación del disco, al cual está aplicada la fuerza P_i, se muestran en la figura 39. Giremos el vector de velocidad, trazado en cualquier escala, en un ángulo de 90° *en sentido de las agujas del reloj*. Al extremo k_i' del vector de velocidad girado lo llamaremos punto representativo o imagen del punto k_i de aplicación de la fuerza P_i. A base de simples relaciones geométricas, obtenemos

$$P_i v_i \cos(P_i v_i) = P_i v_i \cos\alpha = P_i \lambda_i = M'_{k_i},$$

donde M'_{k_i} es el momento de la fuerza P_i con respecto a la imagen del punto de aplicación de esta fuerza.

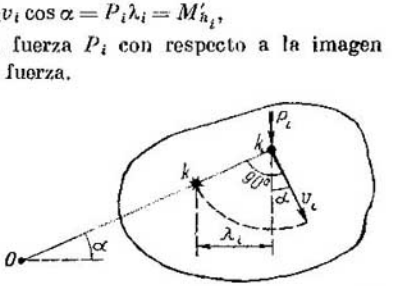


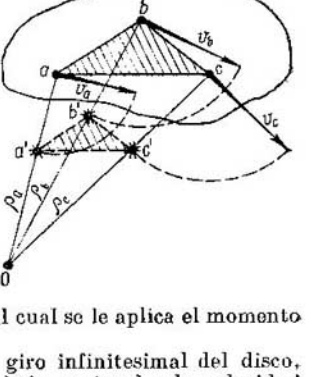
Fig. 39

Después de esto, podemos presentar a la expresión (3.5) así:

$$\sum M'_{k_I} = 0. \qquad (3.6)$$

Por consiguiente, *si el sistema se encuentra en equilibrio, la suma de los momentos de todas las fuerzas actuantes en el sistema, con respecto a las imágenes de los puntos de aplicación de estas fuerzas, es igual a cero.* En tal forma se emplea el principio de los posibles desplazamientos en el método de los puntos representativos.

Fig. 40



Si a los discos del sistema, en calidad de carga, se les aplica los momentos M, éstos, entonces, tendrán que ser sustituidos por pares de fuerzas equivalentes o será necesario agregar, en el primer miembro de la ecuación (3.6), los sumandos $\Sigma M \cdot \omega$, donde ω es la velocidad angular de aquel disco, al cual se le aplica el momento dado.

Esto proviene de que el ángulo de giro infinitesimal del disco, sobre el que los momentos efectúan trabajo, es igual a la velocidad angular multiplicada por la diferencial de tiempo $d\varphi = \omega \cdot dt$.

Para el empleo de la expresión (3.6) es imprescindible conocer las imágenes de los puntos de aplicación de las fuerzas actuantes y las velocidades angulares de los discos. Para establecer las reglas generales de construcción de los puntos representativos, examinemos ciertos tres puntos *abc* sobre un disco y, suponiendo conocido su centro de rotación instantáneo, construyamos sus imágenes (fig. 40). La velocidad de estos puntos a una velocidad angular ω del disco es igual a:

$$v_a = \rho_a\omega;\ v_b = \rho_b\omega;\ v_c = \rho_c\omega.$$

Girando los vectores de velocidad en 90° en sentido de las agujas del reloj, conseguimos sobre los radios de giro los puntos representativos a', b', y c'.

Las relaciones entre las velocidades y los radios se pueden representar de la manera siguiente:

$$\frac{aa'}{\rho_a} = \frac{bb'}{\rho_b} = \frac{cc'}{\rho_c} = \omega.$$

Por consiguiente, $a'b' \parallel ab$, $b'c' \parallel bc$ y $a'c' \parallel ac$, y el triángulo abc ha sido representado por el triángulo semejante $a'b'c'$. A continua-

ción podemos demostrar la siguiente relación:

$$\omega = \frac{aa'}{\rho_a} = \frac{\rho a - a'o}{\rho_a} = 1 - \frac{a'b'}{ab}$$

ó

$$\omega = \frac{ab - a'b'}{ab} = \frac{ac - a'c'}{ac} = \frac{bc - b'c'}{bc}. \qquad (3.7)$$

Es decir, la velocidad angular ω del disco es igual al cociente de la división de la diferencia de las longitudes de cualquier segmento en el disco y su imagen entre la longitud de este segmento.

Si la distancia entre dos puntos de distintos discos, para un desplazamiento infinitesimal, no cambia, las imágenes de estos puntos deben encontrarse en una línea, paralela a la recta, que une dichos puntos, puesto que de lo contrario, de acuerdo con (3.6), el trabajo de las fuerzas P iguales y de sentido opuesto, aplicadas en estos puntos, no sería igual a cero.

Todo lo expuesto conduce a las reglas siguientes:

1) el punto representativo se encuentra en el radio vector con origen en el centro instantáneo de rotación;

2) la imagen de un punto fijo coincide con el propio punto;

3) cualquier segmento de una recta en el disco se representa por el segmento de una recta paralela;

4) toda figura de un disco se representa con una figura semejante.

5) si la distancia entre dos puntos de diferentes discos, para un desplazamiento infinitesimal, queda invariable, sus imágenes se encuentran en una recta, paralela a la recta que une estos puntos en los discos, y viceversa;

6) la imagen de un punto de apoyo fijo coincide con el mismo punto.

7) la imagen de un punto de apoyo móvil se halla sobre la dirección de la barra de apoyo.

En muchos casos, estas reglas dan la posibilidad de construir los puntos representativos de un sistema, si es conocida la posición de uno de ellos, no coincidente con el centro instantáneo. Al construir los puntos representativos, la posición del punto representativo inicial sobre el correspondiente radio vector puede ser asignada arbitrariamente, a exclusión del centro instantáneo.

Ejemplo 5. Determinar la reacción del vínculo *ac* debida a la fuerza P (fig. 41).

Eliminamos la barra *ac* del sistema y sustituimos su efecto con las fuerzas S_{ac} (fig. 41, *b*). A la tierra la suponemos fija. Fijamos la imagen c' para el punto *c* sobre su radio vector. Los puntos representativos a' y b' de los puntos fijos *a* y *b* coinciden con los propios puntos iniciales. Ahora construimos la imagen del punto *d*. El razonamiento se hace así: el punto *d* está sobre la recta *cd* y nosotros sabemos que el segmento representante es paralelo al representado; esto significa, que la imagen del punto *d* deberá estar sobre una recta que, siendo paralela a *cd*, pasa por c'. Por otro lado, el punto *d* está sobre la recta vertical *ad*, por eso, su imagen deberá estar sobre la vertical que pasa a través de la

Fig. 41

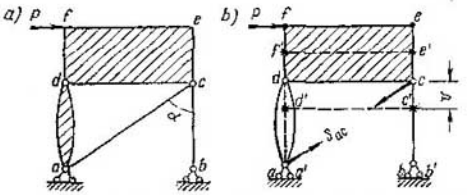


imagen a' del punto a. Por consiguiente, la imagen del punto d se halla en la intersección d' de las dos rectas indicadas. Además, por cuanto la longitud del segmento representante cd es igual a la del segmento original y aquél pertenece al disco $cdef$, entonces, la imagen de este disco tendrá las medidas del disco primitivo, dado que la figura invariante representante es semejante a la representada. Sobre la base de lo dicho obtenemos fácilmente las imágenes de los puntos f y e. Anotando la suma de los momentos de todas las fuerzas con respecto a sus puntos representativos, componemos la ecuación (3.6). En nuestro caso, sólo los momentos de la fuerza P y de la fuerza incógnita S_{ac} aplicada al nudo C son diferentes de cero:

$$Pv - S_{ac}\, v \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

de donde tenemos

$$S_{ac} = \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

3. PROCEDIMIENTO DE LOS CENTROS INSTANTANEOS

Uno de los discos de un sistema monovariante es tomado como fijo y se determinan las posiciones de los centros instantáneos de rotación de los restantes.

La ecuación de los desplazamientos posibles se reduce a la forma

$$\sum P_i\, ds_i \cos(P_i, v_i) = \sum_{\substack{\text{por los} \\ \text{discos}}} \sum_{\substack{\text{por las} \\ \text{fuerzas} \\ \text{en cada} \\ \text{disco}}} P_i h_i\, d\varphi_k = \sum_{\substack{\text{por los} \\ \text{discos}}} M_{O_k}\, d\varphi_k, \qquad (3.8)$$

donde M_{O_k} es el momento de todas las fuerzas externas aplicadas al disco k con respecto a su centro instantáneo de rotación.

Esto significa, *que si un sistema monovariante se encuentra en equilibrio, entonces, la suma de los productos de los momentos producidos por todas las fuerzas externas, que actúan sobre cada disco, con respecto a su centro instantáneo de rotación, por los ángulos de rotación infinitesimales de los respectivos discos, es igual a cero.*

Si el centro instantáneo de rotación de cualquier disco está alejado infinitamente en cierta dirección, entonces, el disco tendrá un movimiento de traslación por la perpendicular a esta dirección. Para tal caso, la expresión (3.8) nos da indeterminación, dado que $M_{O_k} = \infty$, y $d\varphi_k = 0$. Desarrollándola obtenemos

$$M_{O_k}\, d\varphi_k = R\Delta,$$

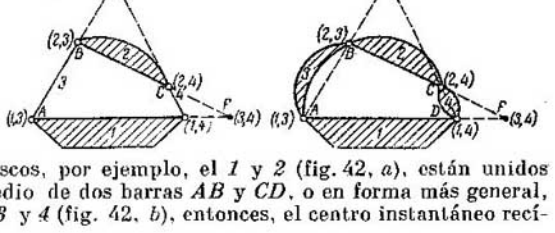
donde R es la resultante de las fuerzas en el disco, y Δ, el movimiento de traslación del disco por la dirección de la fuerza R.

Por consiguiente, para la utilización del método de los centros instantáneos es imprescindible conocer la posición de los centros instantáneos de rotación y los ángulos de giro de los discos en el desplazamiento comunicado.

Demos las reglas de construcción de los centros instantáneos para los sistemas monovariantes compuestos por dos discos:

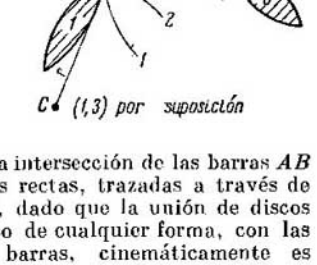
1) si dos discos están unidos por una articulación, esta última es el centro instantáneo de rotación recíproco de éstos (fig. 42);

Fig. 42



2) si dos discos, por ejemplo, el *1* y *2* (fig. 42, *a*), están unidos entre sí por medio de dos barras *AB* y *CD*, o en forma más general, por dos discos *3* y *4* (fig. 42, *b*), entonces, el centro instantáneo recí-

Fig. 43



proco de rotación de los discos está en la intersección de las barras *AB* y *CD* o en el cruce de aquellas mismas rectas, trazadas a través de las articulaciones de los discos *3* y *4*, dado que la unión de discos por medio de una barra o de un disco de cualquier forma, con las mismas articulaciones que en la barras, cinemáticamente es equivalente.

En los casos más complejos, la construcción de los centros instantáneos se lleva a cabo por medio del teorema de tres centros instantáneos: *tres centros instantáneos recíprocos de rotación de tres discos en un sistema variante se encuentran sobre una misma recta.*

Demostremos este teorema a la inversa. Admitamos que tres centros instantáneos recíprocos de rotación de tres discos no están sobre una misma recta (fig. 43). Sea que, por conjetura, el centro instantáneo de rotación de los discos *1* y *3* está ubicado en el punto casual *C*, el de los discos *1* y *2* en el *A* y el de los *2* y *3* en el *B*.

Analicemos el movimiento de los discos *1* y *2* con respecto al disco *3*. Este movimiento puede cumplirse girándolos alrededor de los centros instantáneos (*2,3*) y (*1,3*). Con tal movimiento, el punto *A*, como perteneciente al disco *2*, deberá describir el arco *1—1* con centro en el punto *B*, pero como perteneciente al disco *1*, el arco *2—2* con centro en el supuesto punto *C*. Dado que estos arcos se cortan, el movimiento es imposible. Esto significa, que la conjetura sobre la ubicación arbitraria del centro instantáneo (*1,3*) en el punto *C* es incorrecta.

Se pregunta ¿cuándo será posible el movimiento simultáneo del punto *A*, tanto por el arco *1—1*, como por el *2—2*?

Este será posible sólo cuando los arcos sean tangentes uno al otro y, precisamente, cuando el centro instantáneo (*1,3*) se encuentre sobre la recta *AB*, es decir, sobre una misma recta con los centros instantáneos (*1,2*) y (*2,3*), con lo que está demostrado el teorema.

Los centros instantáneos, determinados por su ubicación, permiten hallar la dependencia entre los ángulos de giro de los discos en el desplazamiento posible dado. Así, por ejemplo, para la fig. 42, si se considera al disco *1* fijo y se determinan los desplazamientos de los discos restantes con respecto a él, entonces, por cuanto el punto *B* pertenece a los discos *2*, *3*, podemos anotar

$$\overline{AB}d\varphi_3 = -\overline{BE}d\varphi_2,$$

donde $d\varphi_3$ es el ángulo de giro del disco *3* en sentido de las agujas del reloj.

De donde obtenemos que

$$d\varphi_2 = -\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}\,d\varphi_3.$$

A continuación, examinando el punto *C*, perteneciente a los discos *2* y *4*, tendremos que

$$\overline{CE}d\varphi_2 = -\overline{DC}d\varphi_4,$$

de donde

$$d\varphi_4 = -\frac{\overline{CE}}{\overline{DC}}\,d\varphi_2 = \frac{\overline{CE}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}\,d\varphi_3.$$

De esta manera, todos los ángulos de giro de los discos serán expresados a través del ángulo de giro de uno de ellos ($d\varphi_3$), lo cual permite dividir por él la expresión (3.8).

El método cinemático es digno de atención al calcular sistemas complicados, cuando su cálculo por los métodos estáticos es dificultoso. La aplicación directa del principio de los desplazamientos posibles y del método de los centros instantáneos es cómodo, cuando los centros instantáneos de giro de los discos de un sistema monovariante pueden ser hallados sin dificultades, cosa común en un sistema variante, compuesto de pequeña cantidad de discos. El método de puntos representativos es cómodo, en un sistema variante, allí donde pueden ser hallados con facilidad todos los puntos representativos necesarios por uno de ellos dado de antemano.

§ 22. MOMENTOS FLECTORES, FUERZAS LONGITUDINALES Y TRANSVERSALES EN LA SECCION DE UNA BARRA. La determinación de los momentos flectores y de las fuerzas longitudinales y transversales en la sección de una barra se efectúa de las condiciones de equilibrio de su parte seccionada, lo que conduce a las siguientes reglas generales (fig. 44).

La **fuerza longitudinal** N es igual a la suma de las proyecciones, sobre la tangente al eje de la barra, de todas las fuerzas izquierdas o derechas con respecto a la sección.

A la fuerza longitudinal usualmente se le considera positiva, si ella produce tracción en la sección transversal de la barra, o sea, si

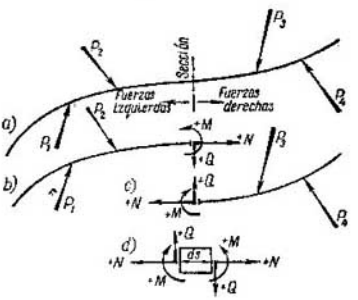


Fig. 44

está dirigida por la normal externa a la sección. Para su determinación es necesario proyectar todas las fuerzas izquierdas sobre el eje N, indicado en la sección transversal de la parte derecha de la barra (fig. 44, *c*), o todas las fuerzas derechas sobre el eje N, indicado en la sección transversal de su parte izquierda (fig. 44, *b*).

La **fuerza transversal** Q es igual a la suma de las proyecciones, sobre la normal al eje de la barra, de todas las fuerzas izquierdas o derechas con respecto a la sección.

La fuerza transversal es considerada positiva, si está dirigida por la normal externa a la sección transversal, girada 90° en sentido de las agujas del reloj. En otras palabras, si la sección se considera vertical, la fuerza transversal es positiva, cuando la proyección ed las fuerzas izquierdas, sobre la normal, está dirigida hacia arriba, y la de las fuerzas derechas, hacia abajo.

Para su determinación es necesario proyectar todas las fuerzas izquierdas sobre el eje Q, indicado en la sección transversal de la parte derecha de la barra (fig. 44, *c*) o todas las fuerzas derechas sobre el eje Q, indicado en la sección transversal de su parte izquierda (fig. 44, *b*).

El **momento flector** M es igual a la suma de los momentos de todas las fuerzas izquierdas o derechas de la sección, con respecto al punto de la misma, que está sobre el eje de la barra.

El momento flector se considera positivo, para los elementos orientados horizontalmente, si en la fibra inferior extrema de la barra (fig. 44, *b*, *c*) se origina tracción. Para su determinación es necesario tomar la suma de los momentos de todas las fuerzas izquierdas, con respecto al punto de la sección, que está sobre el eje de la barra, considerando positivos a los momentos orientados en sentido de las agujas del reloj, o la suma de los momentos de todas las fuerzas derechas, considerando positivos a los momentos orientados en sentido contrario a las agujas del reloj.

Las direcciones positivas de los momentos flectores y de las fuerzas axiles y transversales, aplicados a un elemento infinitesimal de una barra, están expuestas en la fig. 44, *d*.

CAPITULO IV * CRITERIOS DE VARIABILIDAD DE LOS SISTEMAS PLANOS COMPLEJOS CON SUFICIENTE NUMERO DE VINCULOS

§ 23. CRITERIOS ESTATICOS DE VARIABILIDAD. En este capítulo se examinan sistemas complejos con suficiente número de vínculos, la variabilidad, y, particularmente, la variabilidad instantánea de los cuales es difícil o imposible observar por las reglas de unión de dos o tres discos en un sistema invariante.

Tales sistemas complejos pueden ser:

1) invariantes, esto es, sólo con vínculos imprescindibles cuyas reacciones son estáticamente determinadas.

2) variantes, es decir, con vínculos superfluos cuyas reacciones son hiperestáticas. Los sistemas variantes pueden ser con vínculos superfluos en las partes invariantes y también en las partes variantes. A los últimos los vamos a llamar sistemas *particularmente variantes*;

3) de variabilidad instantánea, esto es, con vínculos ficticios, cuyas reacciones serán hiperestáticas, si las cargas pueden ser equilibradas por tales sistemas en un estado sin deflexiones ni deformaciones ($S \cdot 0 = 0$), y tenderán al infinito, después de un desplazamiento infinitesimal del sistema sin su deformación, si la carga no puede ser equilibrada por el sistema de variabilidad instantánea en el estado dado, sin este desplazamiento

$$(S\rho + \Sigma P\Delta = 0, \text{ cuando } \rho \to 0).$$

En consecuencia, *si las reacciones de todos los vínculos, o de algunos, debidas a la carga, no pueden ser determinadas por el principio de los posibles desplazamientos o por otras ecuaciones de equilibrio, entonces, el sistema es de variabilidad instantánea o variante con vínculos superfluos.* Este es el criterio estático general de variabilidad.

Hablando en general, no es tan importante conocer cómo es el sistema, variante o de variabilidad instantánea. Este interrogante se

resuelve a base del análisis de los desplazamientos finales del sistema sin los vínculos (véase § 25).

Por el criterio estático solamente se puede establecer que el sistema es *variante*, si dentro de los límites de cierta parte invariante del sistema (disco) está ubicado siquiera un vínculo, si entre los discos se han colocado más de tres vínculos o, por fin, si cualquier parte del sistema posee un vínculo superfluo. La conclusión de que el sistema es de variabilidad instantánea, si en el disco no hay ningún vínculo o si entre dos discos no hay más de tres vínculos o que cualquier parte del sistema no posee vínculos superfluos, no es siempre correcta, dado que entre tales sistemas puede haber los particularmente variantes. El criterio estático general posee las siguientes variedades.

1. CRITERIO ANALITICO

La reacción S_i de cualquier vínculo no puede ser determinada por las ecuaciones lineales conjuntas de equilibrio, si el número de ecuaciones de equilibrio independientes es menor que las reacciones incógnitas que entran en ellas.

La reacción de cualquier vínculo S_i no puede ser determinada de las ecuaciones lineales conjuntas de equilibrio (3.1), con un número suficiente de ellas, si en la fórmula (3.2) el determinante D se hace igual a cero.

Por consiguiente, *si las ecuaciones de equilibrio son insuficientes*

Fig. 45

para calcular cierta reacción S_i o si, siendo suficientes, el determinante de los coeficientes de las ecuaciones de equilibrio se convierte en cero:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \qquad (4.1)$$

entonces, el sistema es de variabilidad instantánea o variante con vínculos superfluos.

En este caso, está claro que deberán ser examinados todos los grupos independientes de ecuaciones de equilibrio que contengan ciertas reacciones, y para cada una de ellas deberá emplearse el criterio analítico.

Observemos la conversión a cero del determinante (4.1) en el sencillo ejemplo de un sistema notoriamente de variabilidad instantánea (fig. 45).

La condición de equilibrio de la parte del sistema a la izquierda de la sección es:

$$\sum X = S_1 + S_2 + S_3 + P = 0;$$

$$\sum M_{k_1} = S_1 a - S_3 (h-a) = 0;$$

$$\sum M_{k_2} = S_1 h + S_2 (h-a) + P (h-a) = 0.$$

El determinante de los coeficientes de estas ecuaciones es:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & -(h-a) \\ h & (h-a) & 0 \end{vmatrix} = a(h-a) - h(h-a) + (h-a)^2 \equiv 0.$$

A pesar del aparente atractivo del criterio analítico, éste puede ser utilizado sólo en aquellos casos, cuando se establece con medios simples, que la cantidad de ecuaciones es insuficiente para el cálculo de las reacciones y cuando los determinantes que se obtienen no son superiores del tercer orden, dado que, de otra manera, el despejarlos presenta conocidas complicaciones.

2. EL CRITERIO DE LA CARGA NULA

Dado que las reacciones de los vínculos indispensables de los sistemas variantes o invariantes, debidas a la carga, son de determinación simple por las ecuaciones de la estática, entonces, no habiendo carga, las reacciones de los vínculos son nulas. Por consiguiente, si por las ecuaciones de la estática podemos demostrar que las reacciones de todos los vínculos sin carga son iguales a cero, es decir, que para ellas es imposible otro resultado, el sistema, entonces, es invariante, pero, si no podemos demostrarlo y las reacciones

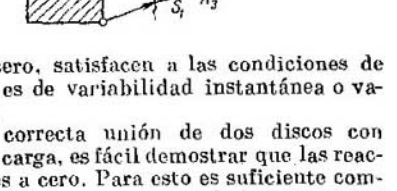


Fig. 46

de los vínculos, diferentes de cero, satisfacen a las condiciones de equilibrio, entonces, el sistema es de variabilidad instantánea o variante con vínculos superfluos.

Así, por ejemplo, con la correcta unión de dos discos con tres barras (fig. 46), no habiendo carga, es fácil demostrar que las reacciones de los vínculos son iguales a cero. Para esto es suficiente componer las tres ecuaciones de equilibrio, como suma de los momentos de las fuerzas con respecto a los puntos k_1, k_2, y k_3. Otros valores de las reacciones de los vínculos no satisfacen a las condiciones de equilibrio. Es distinto cuando las tres barras se cortan en un punto.

En este caso, cualquier fuerza S_1 puede ser equilibrada por las S_2 y S_3, que se cortan con ella en un punto. Esto significa que las reacciones S_1, S_2 y S_3 pueden ser no sólo iguales a cero, sino también a otros valores cualesquiera que satisfagan a la ecuación de equilibrio. Por consiguiente, el sistema es de variabilidad instantánea o variante con vínculos superfluos. En nuestro caso, es de variabilidad instantánea.

Examinemos el sistema simétrico (fig. 47) compuesto por ocho discos, unidos, tomando en cuenta la multiplicidad de los vínculos,

Fig. 47

con ocho articulaciones y ocho vínculos de sustentación. No es difícil convencerse de que la igualdad (2.5) será satisfecha. Calculemos las reacciones en las barras del sistema, no habiendo carga. Efectuemos el corte *1—1* y, para la parte superior, compongamos la suma de los momentos con respecto al punto k:

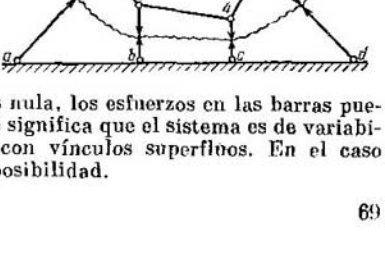
$$\sum M_k = -S_{1b}\frac{l}{2} + S_{4c}\frac{l}{2} = 0,$$

de donde

$$S_{1b} = S_{4c} = S.$$

A continuación, de la condición de equilibrio de los nudos recortados *1*, *2*, *3* y *4*, determinamos las fuerzas axiales en todas las barras. Todas ellas dependen de S y no son iguales a cero, si $S \neq 0$.

Fig. 48



Por consiguiente, si la carga es nula, los esfuerzos en las barras pueden ser distintos de cero, lo que significa que el sistema es de variabilidad instantánea o variante con vínculos superfluos. En el caso dado, es correcta la primera posibilidad.

Es distinto si examinamos el sistema análogo de la fig. 48, en el que la barra *1—4* no es paralela a la *2—3*. También aquí, de la condición de equilibrio, de la parte superior en forma de la suma de los momentos con respecto el punto k, obtenemos que $S_{1b} = S_{4c} = S$. Pero (si $S \neq 0$) al investigar el equilibrio de los nudos *1* y *4*, nos encontramos con la siguiente contradicción: en la barra *1—4*, la fuerza axil, determinada del equilibrio del primer nudo, no será igual a la fuerza determinada del equilibrio del cuarto nudo, y esto no puede ser. Tal contradicción desaparecerá, si colocamos $S = 0$ y, entonces, los esfuerzos en todas las barras serán nulos. Este sistema es invariante.

Por cuanto en un sistema de variabilidad instantánea las reacciones de los vínculos ficticios, no habiendo carga, pueden ser distintas de cero, entonces, tales sistemas permiten el autotensionado artificial. Así, por ejemplo, seccionando cualquiera de las tres barras (v. fig. 14, *d*), en ella, por medio de un gato, podemos crear una fuerza artificial, la que será equilibrada con las fuerzas axiles en las otras dos barras, luego de lo cual se deberá unir la barra y recoger el gato.

§ 24. EL CRITERIO DE INVARIABILIDAD POR EL METODO DE SUSTITUCION DE VINCULOS. La determinación de las reacciones de los vínculos sustituidos, por el método de sustitución de vínculos, se efectúa de la ecuación cuya forma es:

$$r_{11}X_1 + r_{12}X_2 + \ldots + R_{1P} = 0;$$
$$r_{21}X_1 + r_{22}X_2 + \ldots + R_{2P} = 0;$$
$$r_{n1}X_1 + r_{n2}X_2 + \ldots + R_{nP} = 0.$$

La reacción del vínculo no puede ser determinada cuando el determinante de los coeficientes de estas ecuaciones se convierte en cero, esto es,

$$D = \begin{vmatrix} r_{11}r_{12} \ldots r_{1n} \\ r_{21}r_{22} \ldots r_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ r_{n1}r_{n2} \ldots r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.2)$$

Por consiguiente, *si el determinante de las ecuaciones canónicas resulta igual a cero, por el método de sustitución de vínculos, el sistema será de variabilidad instantánea o variante con vínculos superfluos.*

Si en este caso, en el disco ha sido colocado aunque sólo sea un vínculo sustituible, o sea, superfluo, entonces, el sistema es variante. La conclusión de que, si el vínculo sustituible no es superfluo, el sistema, entonces, es de variabilidad instantánea, no siempre resulta correcta, dado que puede haber sistemas particularmente variantes.

El criterio de variabilidad por el método de sustitución de vínculos, aunque por la forma es parecido al criterio general analítico, en realidad, es mucho más cómodo que el último. El asunto estriba

en que, frecuentemente, por medio de la sustitución de uno o dos vínculos, el sistema complejo se transforma en simple. Por eso, el determinante de las ecuaciones por el procedimiento de sustitución de vínculos, como norma, no será de un orden elevado. En esto

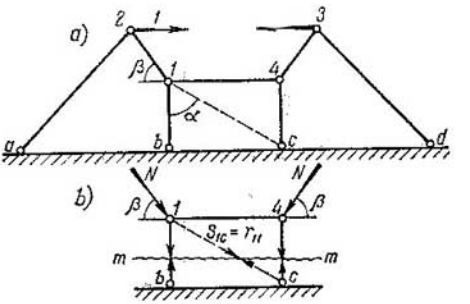


Fig. 49

radica el *particular mérito del criterio examinado y su ventaja frente a los otros*. Es muy cómodo para su utilización práctica.

Examinemos el sistema expuesto en la fig. 47. Le damos una forma más simple. Para esto le quitamos la barra *2—3* y la sustituimos con la *1 — c* (fig. 49). El nuevo sistema es invariante, lo que

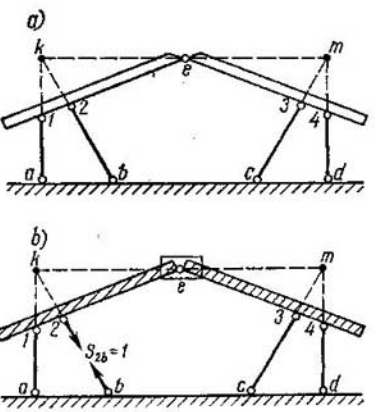


Fig. 50

se puede observar fácilmente, con la formación de nudos por medio de dos barras en el siguiente orden: *1*, *4*, *2* y *3*. Dado que en el sistema se efectuó la sustitución de una sola barra, entonces, el determinante (4.2) es de primer orden, o sea, $D = r_{11}$; r_{11} es la reacción de la

barra sustituyente $1-c$ (fig. 49), debida a $X_1 = S_{23} = 1$, por la dirección de la barra sustituida $2-3$.

Del recorte de los nudos 2 y 3, en las barras $1-2$ y $3-4$ obtenemos las fuerzas axiles, iguales entre sí por la condición de simetría. Las designamos con la letra N. A continuación, examinamos la parte $b-1-4-c$ del sistema y escribimos la condición de equilibrio de su parte superior (fig. 49, b):

$$\sum X = N \cos\beta - N \cos\beta - S_{1c} \operatorname{sen}\alpha = 0,$$

de donde obtenemos, precisamente, la reacción del vínculo sustituyente $S_{1c} = 0$.

Esto significa, que $r_{11} = 0$ y que el sistema es de variabilidad instantánea. Del mismo modo, no es difícil convencerse de que el sistema expuesto en la fig. 48 es invariante.

Examinemos otro sistema simétrico (fig. 50, a). Lo transformamos, sustituyéndole el vínculo $2-b$ cerrando la articulación e (fig. 50, b). El sistema transformado es simple y su variabilidad evidente. Dado que también aquí se efectuó la sustitución de un solo vínculo, entonces, $D = r_{11}$. En este caso, r_{11} es el momento en la soldadura, debido a las fuerzas $S_{2b} = 1$. Descomponiendo la fuerza $S_{2b} = 1$ en el punto k, en las direcciones de la barra $1-a$ y $k-m$, nos convencemos de que la resultante de las fuerzas izquierdas o derechas pasa a través de la articulación cerrada. Esto significa, que el momento en ella es igual a cero, es decir, que $r_{11} = 0$. El sistema es de variabilidad instantánea.

§ 25. LOS SIGNOS CINEMATICOS DE VARIABILIDAD. Los sistemas invariantes, luego de la eliminación de cualquier vínculo indispensable, se transforman en variantes, que permiten desplazamientos infinitesimales y que poseen los desplazamientos Δ_S diferentes de cero, en la dirección del vínculo eliminado.

Los sistemas variantes, luego de la eliminación de cualquier vínculo superfluo, permiten desplazamientos finitos, en los cuales, los desplazamientos Δ_S, por la dirección del vínculo quitado, son siempre iguales a cero.

Los sistemas de variabilidad instantánea, después de la eliminación de cualquier vínculo ficticio, se transforman en monovariantes, que permiten tales desplazamientos, en los cuales, por la dirección del vínculo excluido, el valor de la traslación Δ_S es igual a cero [1] *solamente* para los desplazamientos infinitesimales, y para los finitos se distingue de cero.

Si el vínculo ficticio es una barra, entonces ésta estará ubicada entre dos puntos del sistema, la distancia entre los cuales será invariable sólo cuando el desplazamiento sea infinitesimal. Pero si el vínculo ficticio es capaz de desarrollar momento, entonces, éste

[1] Con más exactitud, es igual a un valor infinitesimal de orden superior de pequeñez, en comparación con el parámetro que determina el desplazamiento infinitesimal.

estará ubicado entre discos que, en un desplazamiento infinitesimal, no poseen giro recíproco. Con otras palabras, las velocidades angulares de estos discos son iguales entre sí.

Por consiguiente, *si al sistema con un vínculo eliminado no se le puede dar un desplazamiento infinitesimal posible, con un desplazamiento* Δ_S *distinto de cero por la dirección del vínculo eliminado, entonces, el sistema es de variabilidad instantánea o variante con vínculos superfluos.*

Este es el criterio cinemático general.

Si el desplazamiento Δ_S es igual a cero *sólo* para el desplazamiento infinitesimal posible, entonces, el sistema será de variabilidad instantánea, pero, si es igual a cero en el caso de un desplazamiento finito, el sistema será variante con vínculos superfluos.

Este es el criterio por el que también se ponen de manifiesto los sistemas particularmente variantes.

El criterio cinemático posee las siguientes variedades.

1. EL CRITERIO POR EL PROCEDIMIENTO DE LOS PUNTOS REPRESENTATIVOS

Como fue establecido anteriormente, en un sistema variante con un vínculo insuficiente, la imagen de una barra es paralela a la misma barra.

Por eso, si quitamos una barra del sistema, se pueden construir las imágenes de los puntos de fijación de los extremos de esta barra y, si resulta que las imágenes de estos puntos están sobre una línea paralela a la barra eliminada, entonces, el sistema es de variabilidad instantánea o variante con vínculos superfluos. Esto se infiere de la tesis enunciada anteriormente de que, si la distancia entre dos puntos que están sobre discos diferentes no varía, entonces, la recta que atraviesa a los puntos representativos es paralela a la que los une en el sistema. A esta misma conclusión también puede llegarse a base de los siguientes razonamientos. Por el procedimiento de los puntos representativos, la reacción S del vínculo eliminado está contenida en la expresión (3.6), la cual escribimos así:

$$\sum M_P + S\overline{M}_S = 0. \qquad (4.3)$$

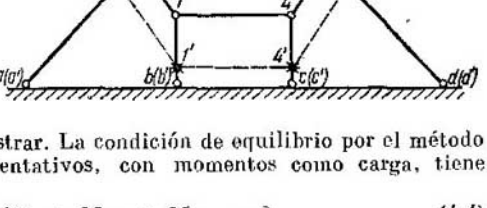
Aquí M_S es el momento debido a las fuerzas $S = 1$, con respecto a las imágenes de los puntos de aplicación de estas fuerzas unitarias. Si los puntos representativos de los extremos de la barra eliminada están idénticamente alejados de la línea de acción de las fuerzas $S = 1$, o sea, están sobre una recta paralela a la barra excluida, entonces, por cuanto las dos fuerzas $S = 1$ están dirigidas en distintas direcciones, $\overline{M}_S = 0$. Por consiguiente, la reacción del vínculo quitado no puede ser determinada por las ecuaciones de equilibrio. Pero esto es criterio de variabilidad. Por consiguiente, *si la imagen de los extremos de la barra excluida está sobre una línea paralela a la barra, entonces, el sistema es de variabilidad instantánea o variante con vínculos superfluos.*

Examinemos nuevamente el sistema representado en la figura 47. Eliminemos la barra *2—3* y construyamos los puntos representativos para el sistema variante obtenido (fig. 51), por las reglas expuestas anteriormente. La imagen del primer punto 2′ sobre la recta *a—2* la fijamos arbitrariamente. Luego, trazando las rectas *2′—1′* y *b′—1′* paralelas a las barras *2—1* y *b—1*, obtenemos la imagen 1′ del punto *1*, etc. Por las condiciones de simetría, la recta *2′—3′* es paralela a la barra eliminada *2—3*. El sistema es de variabilidad instantánea.

Si se analiza con el mismo procedimiento el sistema expuesto en la fig. 48, entonces, éste resultará invariante; la línea representativa *2′—3′* en él no será paralela a la barra eliminada *2—3*.

Si el vínculo eliminado lo sustituimos por momentos, el criterio consiste en que las velocidades angulares de los discos, a los que están aplicados los momentos, deberán ser iguales entre sí. Esta

Fig. 51



tesis es fácil de demostrar. La condición de equilibrio por el método de los puntos representativos, con momentos como carga, tiene la forma:

$$\sum M_P \pm M\omega_k \mp M\omega_m = 0, \qquad (4.4)$$

donde ω_k y ω_m son las velocidades angulares de los discos, a los cuales están aplicados los momentos, como reacciones del vínculo excluido. De (4.4) encontramos que

$$M = \mp \frac{\Sigma M_P}{\omega_k - \omega_m}.$$

La condición de variabilidad es $\omega_k - \omega_m = 0$ ó $\omega_k = \omega_m$, de donde se desprende que los ángulos de giro de estos discos deberán ser iguales.

2. EL CRITERIO POR EL PROCEDIMIENTO DE LOS CENTROS INSTANTANEOS

El criterio, por el procedimiento de los centros instantáneos se desprende del teorema de los tres centros instantáneos de rotación de tres discos: *si tres centros instantáneos de rotación recíprocos de tres discos están unidos por pares, con variabilidad por medio de una articulación o de dos o más barras, que se cruzan en un punto y que se hallan sobre una misma recta, entonces, el sistema es de variabilidad instantánea.*

CAPITULO V * METODOS PRINCIPALES DE CALCULO DE SISTEMAS PLANOS ESTATICAMENTE DETERMINADOS CON CARGA RODANTE

§ 26. NOCION SOBRE CARGA RODANTE. Rodante o móvil se llama a la carga que varía continuamente su posición en la estructura, esto es, que se desplaza por ella a cierta velocidad. Ejemplos de carga rodante pueden ser los automóviles, tranvías, trolebuses, trenes, etc., en movimiento.

La carga rodante, al cambiar su disposición en la estructura, origina en ella fuerzas internas variables, tensiones y desplazamientos. Además, por su naturaleza, es una carga dinámica.

La variación de cualquiera de los valores estudiados —de las fuerzas internas, de las tensiones o de los desplazamientos—, de acuerdo con la posición de la carga sobre la estructura, depende de cómo sea la propia estructura, de lo que representa en sí la magnitud estudiada y de cuál es la carga rodante que actúa.

Si durante el movimiento de la carga estática por la construcción, la variación de la magnitud estudiada es sólo simple, entonces, ésta variará desde cero, con la introducción de la carga en la estructura, hasta el valor absoluto más alto en cierta posición de la carga, volviendo nuevamente a cero en cuanto ésta haya pasado por toda la construcción.

Tal es, por ejemplo, la variación de la reacción de apoyo de una viga simple, cuando por ella se desplaza un trozo de carga uniforme, cuya extensión es $c = l + \Delta$ (fig. 52).

Si durante el movimiento de la carga por la construcción el valor estudiado es capaz de variar binariamente, entonces, ésta lo hará desde cero, al entrar la carga en la estructura, y hasta cero al salir, de ella con los valores máximo y mínimo en el sentido algebraico, en las diferentes posiciones de la carga sobre la construcción (fig. 53).

Cuando la carga móvil contiene pesos pesados y livianos, alternándose de diferente manera entre sí, son factibles varios máximos y mínimos de la magnitud estudiada, tanto durante su crecimiento general, como durante su decrecimiento, así como diferentes tipos posibles de puntos angulares y discontinuidades de primer género, con una o varias variaciones del signo de la magnitud analizada (fig. 53).

Por cuanto las estructuras deberán ser calculadas a las fuerzas internas, tensiones y desplazamientos numéricamente más altos, de ambos signos, entonces, su cálculo, en primer lugar, con carga rodante, está ligado a la determinación de aquellas posiciones de la carga,

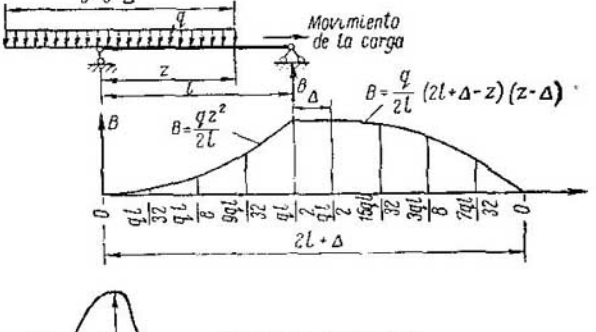


Fig. 52

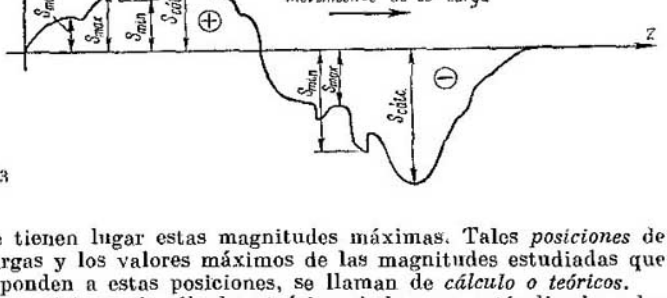


Fig. 53

donde tienen lugar estas magnitudes máximas. Tales *posiciones* de las cargas y los valores máximos de las magnitudes estudiadas que corresponden a estas posiciones, se llaman de *cálculo o teóricos*.

Las posiciones de cálculo o teóricas de la carga están ligadas a los máximos y mínimos de las magnitudes analizadas, la existencia de los cuales se determina de las siguientes condiciones extremas para las funciones elementales [1].

1. Si $S = f(z)$ es una función continua con derivadas continuas hasta el orden $n°$ incluido, entonces, en el punto máximo o mínimo, cuando $z = z_0$, es indispensable que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) para el máximo: } \dfrac{dS}{dz}=0 \text{ y } \dfrac{d^nS}{dz^n}<0; \\ \text{b) para el mínimo: } \dfrac{dS}{dz}=0 \text{ y } \dfrac{d^nS}{dz^n}>0; \end{array}\right\} \qquad (5.1)$$

donde n es el orden de la derivada inferior diferente de 0, si ella es par.

[1] Los valores máximos y mínimos de la función $S = f(z)$ raramente se hallan en los extremos del tramo. En estos últimos casos, convencionalmente, es necesario considerar a la función dada, prolongada hacia la derecha e izquierda con valores iguales a cero y examinar a los puntos extremos como intermedios.

O también

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) para el máximo } \frac{dS}{dz}=0 \text{ y } \frac{dS}{dz}\gtreqless 0, \text{ si } z=z_0-dz,\\ &\qquad\qquad \text{pero } \frac{dS}{dz}\lesseqgtr 0, \text{ si } z=z_0+dz;\end{aligned}\right\} \quad (5.2)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{b) para el mínimo: } \frac{dS}{dz}=0 \text{ y } \frac{dS}{dz}\lesseqgtr 0, \text{ si } z=z_0-dz,\\ &\qquad\qquad \text{pero } \frac{dS}{dz}\gtreqless 0, \text{ si } z=z_0+dz.\end{aligned}\right\} \quad (5.2)$$

En las desigualdades con tres signos, tanto aquí como también más adelante, es necesario tomar simultáneamente los signos superiores, los del medio o los inferiores.

Las condiciones (5.2) son también correctas en aquellos casos en que las primeras derivadas del orden menor de n son discontinuas.

2. Si $S = f(z)$ es una función continua con la primera derivada discontinua, entonces, en el punto máximo o mínimo en la discontinuidad de la derivada, cuando $z = z_0$, deberá ser:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) para el máximo, cuando } z=z_0-dz, \frac{dS}{dz}\gtreqless 0\\ &\qquad\qquad \text{y, cuando } z=z+dz, \frac{dS}{dz}\lesseqgtr 0;\end{aligned}\right\} \quad (5.3)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{b) para el mínimo, cuando } z=z_0-dz, \frac{dS}{dz}\lesseqgtr 0\\ &\qquad\qquad \text{y, cuando } z=z_0+dz, \frac{dS}{dz}\gtreqless 0.\end{aligned}\right\} \quad (5.4)$$

Para los máximos y mínimos en los tramos entre las discontinuidades de las derivadas, se mantienen las condiciones (5.1) y (5.2).

3) Si $S = f(z)$ es una función lisa por intervalos, con discontinuidades de primer género, entonces, en el lugar de los máximos y mínimos en las discontinuidades, siendo $z = z_0$, es indispensable que

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) para el máximo, cuando } \Delta S>0, \frac{dS}{dz}\leqq 0, \text{ si } z=z_0+dz,\\ &\qquad\qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \Delta S<0, \frac{dS}{dz}\geqq 0, \text{ si } z=z_0-dz;\end{aligned}\right\} \quad (5.5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{b) para el mínimo, cuando } \Delta S>0, \frac{dS}{dz}\leqq 0, \text{ si } z=z_0-dz,\\ &\qquad\qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \Delta S<0, \frac{dS}{dz}\geqq 0, \text{ si } s=z_0+dz.\end{aligned}\right\} \quad (5.6)$$

§ 27. METODOS PARA DETERMINAR LA POSICION DE CALCULO O TEORICA DE UNA CARGA RODANTE

1. METODO GENERAL

El método general radica en que la carga rodante, sobre una estructura, se examina como una unidad integral, a la que se fija cierta coordenada corriente z, en función de la cual se compone la

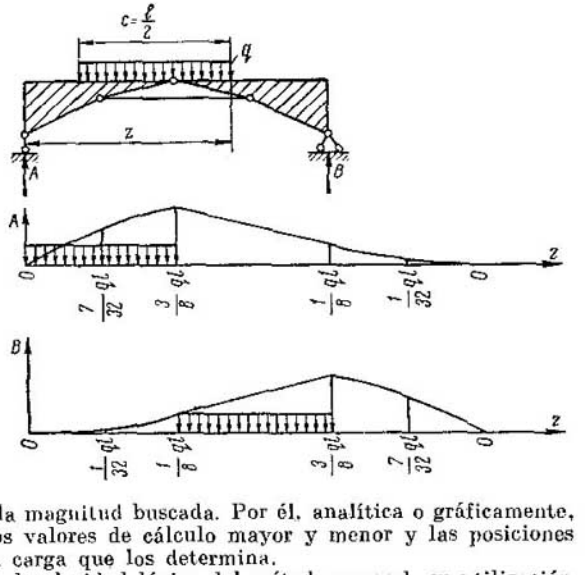


Fig. 54

expresión de la magnitud buscada. Por él, analítica o gráficamente, se calculan los valores de cálculo mayor y menor y las posiciones teóricas de la carga que los determina.

A pesar de la claridad lógica del método general, su utilización práctica es muy complicada, dado que las funciones de las magnitudes analizadas, en el caso de un gran número de cargas discontinuas y fuerzas concentradas, resultan compuestas de gran cantidad de intervalos de funciones lisas, posiblemente con máximos y mínimos, para los cuales, la determinación de los valores más bajos y más altos de la magnitud investigada es difícil.

Sólo en casos particulares, aislados, para cargas simples, a las cuales podemos referir, por ejemplo, una faja de carga uniforme, el método general lleva (aún así, no siempre) a operaciones relativamente sencillas. Incluso en estos casos simples, usualmente, dicho método le cede su puesto al método de las líneas de influencia, que será examinado más adelante. Pero éste es un método *general* para todos los sistemas, independientemente de que usemos o no en él el principio de independencia de acción de las fuerzas y de si la estructura se encuentra en la fase elástica o plástica de trabajo. A diferencia del método general, el de las líneas de influencia, con el que entraremos en conocimiento más adelante, se emplea *sólo* en los sistemas para los cuales el principio de independencia de acción de las fuerzas es prácticamente correcto, y *sólo* para el cálculo de aquellas magnitudes, para las cuales este principio es correcto en la forma algebraica. El método general, actualmente, por lo visto, es el único método utilizable en los sistemas para los cuales el principio

de independencia de acción de las fuerzas no puede ser empleado.

Con el método general nos pondremos en conocimiento con un simple ejemplo de determinación de las reacciones máximas A y B, debidas a una carga uniforme, cuya extensión es $c = \frac{l}{2}$ (fig. 54). Suponemos la carga con un movimiento de izquierda a derecha. El inicio de ella lo fijamos con la coordenada z. En este caso, los gráficos de variación de las reacciones estarán compuestos de tres funciones lisas por intervalos, en dependencia de la posición de la carga.

Cuando $0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}$, $\quad A = \frac{qz}{2l}(2l - z)$; $\quad B = \frac{qz^2}{2l}$.

Si $\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant l$, $\quad A = \frac{q}{2}\left(\frac{5l}{4} - z\right)$; $\quad B = \frac{q}{2}\left(z - \frac{l}{4}\right)$.

Siendo $l \leqslant z \leqslant \frac{3}{2}l$, $\quad A = \frac{q}{8l}(3l - 2z)^2$; $\quad B = \frac{q}{8l}(3l - 2z)(l + 2z)$.

Por estas ecuaciones fueron construidos los gráficos de variación de las reacciones de apoyo. Por ellos se determinan fácilmente los valores de cálculo (máximos) de las reacciones y las posiciones de la carga, en las cuales éstos tienen lugar (véase fig. 54).

2. METODO DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA

El método de las líneas de influencia consiste en que la estructura, al principio, se examina no bajo la acción de la carga rodante dada, sino sólo bajo la de una carga concentrada móvil P de dirección constante, cuya situación sobre la estructura se determina, en forma general, con la coordenada variable z.

Para tal posición de la fuerza se determina la magnitud investigada (una reacción de apoyo o de vínculo, una tensión, un desplazamiento, etc.), que toca a la unidad de la fuerza P, que admite el empleo del principio de acción de las fuerzas en la forma algebraica. Esta será función de la coordenada z, es decir, de la ubicación de la carga sobre la estructura. Esta función puede ser representada analítica o gráficamente. En relación con esto, cuando una fuerza solitaria concentrada P de dirección constante se desplaza por la estructura, a la representación gráfica de la ley de variación de cualquier magnitud investigada por unidad de P, para la cual es correcto el principio de superposición, se le llama *línea de influencia* y, a la expresión analítica de esta ley, *ecuación de la línea de influencia*. Puede ser que hubiera sido mejor llamarla línea de variación.

Las líneas de influencia se construyen, en un sistema de coordenadas rectangulares, con el eje de las abscisas perpendicular a la fuerza P. En tal sistema de coordenadas, la abscisa determina la posición de la carga sobre la estructura y, la ordenada, la magnitud investigada, para la cual se construyó la línea de influencia. Es costumbre, a esta última, rayarla con ordenadas. Al eje de las abscisas lo vamos a llamar *base* de la línea de influencia.

La dimensión de las ordenadas de la línea de influencia se determina por la dimensión del cociente, al dividir la dimensión de la magnitud investigada entre la de la fuerza P, esto es,

$$\text{dimensión de la l.i.} = \frac{\text{dimensión de la magnitud estudiada}}{\text{dimensión de la fuerza } P}.$$

La variación de la magnitud investigada, que corresponde a la unidad de la fuerza P, formalmente, puede ser interpretada como la variación de esta magnitud por la acción de la fuerza abstracta $P = 1$. En correspondencia con esto, si una fuerza abstracta $P = 1$ de dirección constante se desplaza por la estructura, a la representación gráfica de la ley de variación de cualquier magnitud investigada se le puede llamar *línea de influencia* y, a su expresión analítica, *ecuación de la línea de influencia.*

Sin embargo, si una carga dimensional de dirección constante $P = 1$ se mueve por la estructura, por línea de influencia se puede entender la expresión gráfica de la ley de variación de cualquier magnitud. En este caso, la dimensión de las ordenadas de las líneas de influencia corresponderá a la de la magnitud investigada.

Por consiguiente, la diferencia entre las líneas de influencia construidas con la carga abstracta $P = 1$ y las construidas con la dimensional consiste solamente en que tienen diferentes dimensiones, lo cual deberá ser tenido en cuenta al emplear unas u otras líneas de influencia. En adelante, al construir las líneas de influencia, vamos a emplear la carga abstracta $P = 1$.

La ley establecida de la influencia de una fuerza unitaria, cualquiera que sea su posición, sobre la magnitud que se analiza en forma de línea de influencia y su ecuación, da la posibilidad de determinar, por el principio de superposición, la magnitud buscada debida a cualesquiera fuerzas paralelas a la fuerza P, como la suma algebraica de los valores de cada fuerza por separado. En este caso, cada fuerza, al actuar sobre la estructura en un determinado lugar, por este mismo principio, aumentará en forma proporcional la magnitud investigada, obtenida de la fuerza $P = 1$ ubicada allí mismo. De lo dicho se deduce, *que el método de las líneas de influencia es empleable sólo para tales estructuras y magnitudes para las cuales es utilizable el principio de independencia de acción de las fuerzas en la forma algebraica.*

La ley de influencia de un peso solitario P que se desplaza por la estructura puede ser, naturalmente, determinada también en aquel caso, cuando el principio de independencia de acción de las fuerzas para tal sistema o magnitud no se puede emplear. Sin embargo, la utilización de esta ley sin el principio de superposición, en el caso de varias cargas, es muy complicada.

Por cuanto las líneas de influencia dan la posibilidad de calcular la magnitud buscada para cualquier posición de cualquier carga móvil de dirección constante, entonces, naturalmente, éstas también pueden ser utilizadas para la determinación de la posición de cálcu-

lo o teórica de la carga. Si la posición de cálculo de una carga móvil fuera conocida de antemano sin la construcción de las líneas de influencia, entonces, la magnitud estudiada se podría determinar por los medios usuales y no habría necesidad de construirlas. Por eso, *el fin fundamental de las líneas de influencia es establecer la posición de cálculo de la carga móvil.* Y luego, por cuanto las líneas de influencia ya fueron construidas, por ellas se puede determinar el propio valor teórico de la magnitud analizada.

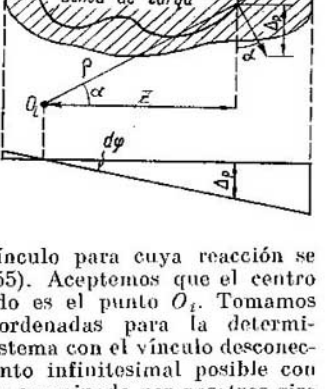
Las líneas de influencia pueden ser usadas con efectividad, en el caso de cargas fijas, sólo cuando las combinaciones de estas últimas, actuando por separado, son muchas.

El método de las líneas de influencia fue expuesto para cualquier magnitud estudiada, que permita el empleo de la superposición, comprendidas, también, dentro de él las reacciones en los vínculos.

§ 28. SOBRE LA FORMA DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA. La forma de las líneas de influencia depende de la esencia física de la magnitud que se estudia y de las propiedades del sistema lineal examinado. La línea de influencia puede estar compuesta por líneas rectas o curvas.

Demostremos que las líneas de influencia de las reacciones de los vínculos de los sistemas estáticamente determinados están compuestas sólo por segmentos de rectas. Para esto recurriremos al método cinemático de determinación de las reacciones de los vínculos. Imaginémonos que la carga vertical $P = 1$ se desplaza por cierta línea arbitraria de carga $m - m$, sobre uno de los discos de un sistema monovariante, obtenido del sistema estáticamente determinado dado, mediante la eliminación de aquel vínculo para cuya reacción se construye la línea de influencia (fig. 55). Aceptemos que el centro instantáneo de rotación del disco dado es el punto O_1. Tomamos este punto como origen de las coordenadas para la determinación de la posición de la carga. Al sistema con el vínculo desconectado le comunicamos un desplazamiento infinitesimal posible con respecto a la tierra, en el cual, el disco examinado por nosotros gira en un ángulo $d\varphi$ y componemos la ecuación de los trabajos en los posibles desplazamientos.

Fig. 55



El trabajo lo efectuarán solamente la fuerza $P = 1$ y las reacciones del vínculo eliminado S.

$$1 \cdot \Delta_P + S\Delta_S = 0.$$

En este caso, Δ_P es una magnitud variable que representa en sí el desplazamiento por la dirección de la carga móvil $P = 1$. Dado que $\Delta_P = \rho d\varphi \cos \alpha = z d\varphi$, entonces,

$$S = -\frac{\Delta_P}{\Delta_S} = -\frac{d\varphi}{\Delta_S} z.$$

De esta manera, la reacción del vínculo S depende linealmente de las coordenadas de la carga y no de por qué línea de carga del disco dado se desplazará la carga $P = 1$. Por consiguiente, *dentro de los límites de este disco, la línea de influencia de la reacción de un vínculo en los sistemas estáticamente determinados* es recta.

Si a Δ_P lo presentamos en forma de diagrama de los desplazamientos verticales de la carga $P = 1$, entonces, éste será también el diagrama de los desplazamientos verticales de la línea de carga del disco, por cuanto Δ_P no depende de la trayectoria de la carga P. Esto significa, que *el diagrama de los desplazamientos verticales del disco será representado por la recta que corta la base por debajo de su centro de rotación instantáneo, con respecto a la tierra.* Dado que $\Delta_P = z d\varphi$ es proporcional a $d\varphi$, *el ángulo de giro del disco es igual al ángulo de giro del diagrama de sus desplazamientos verticales* Δ_P.

La línea de influencia de los desplazamientos elásticos, como será demostrado más adelante, es curvilínea.

§ 20. METODO ESTATICO DE CONSTRUCCION DE LINEAS DE INFLUENCIA. Los diferentes procedimientos de determinación de las reacciones de los vínculos por las leyes de la estática, estudiados anteriormente, son empleados también para construir las líneas de influencia. La diferencia residirá sólo en que, para una carga fija, la reacción del vínculo es una magnitud constante, pero, al construir las líneas de influencia, es una magnitud variable, dependiente de la posición de la carga $P = 1$. La expresión analítica de la reacción buscada por la coordenada corriente de la carga es, precisamente, la ecuación de la línea de influencia.

La idea de la construcción de las líneas de influencia por el método estático la examinaremos con un ejemplo simple. Sea que se exige construir las líneas de influencia de las reacciones de apoyo A y B en el sistema representado en la fig. 56. Sus expresiones analíticas se obtienen de la manera habitual:

$$\sum M_B = Al - 1\,(l - z) = 0, \text{ de donde } A = \frac{l - z}{l};$$

$$\sum M_A = -Bl + 1 \cdot z = 0, \text{ de donde } B = \frac{z}{l}.$$

Estas expresiones son las ecuaciones de las rectas que pueden ser construidas por dos puntos cualesquiera (fig. 56)

si $z = 0$, $A = 1$, $B = 0$;

siendo $z_1 = l$, $A = 0$, $B = 1$.

Al construir las líneas de influencia de la fuerza axil en la barra $a - b$, efectuaremos el corte $I-I$ a través de esta barra y de la

articulación C. Las condiciones de equilibrio del disco izquierdo o derecho dependerán de la ubicación de la fuerza $P = 1$, a la derecha o a la izquierda de la sección $I—I$. Es por eso que debemos examinar dos de sus posiciones.

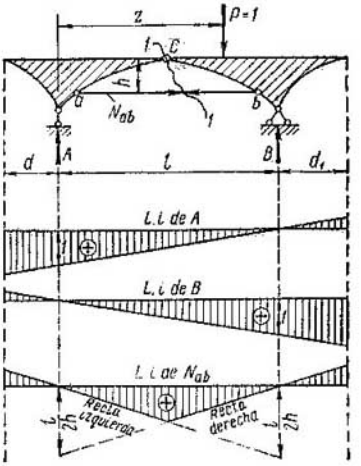


Fig. 56

1. La carga está a la derecha de la sección

$$\left(\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant l + d\right).$$

Examinemos el equilibrio del disco izquierdo

$$\sum M_C^{izq} = A\,\frac{l}{2} - N_{ab}h = 0,$$

de donde

$$N_{ab} = A\,\frac{l}{2h} = \frac{l-z}{l}\cdot\frac{l}{2h}.$$

La expresión obtenida es la ecuación de la recta que, en correspondencia con la posición de la carga, se llama *recta derecha*. La construimos por dos puntos:

$$\text{cuando } z = 0, \quad N_{ab} = \frac{l}{2h} \text{ y si } z = l, \; N_{ab} = 0.$$

Sin embargo, el segmento de la recta derecha, que limita la línea de influencia, se determina con la variación de la coordenada z de la carga, cuando esta última se encuentra en el sistema a la derecha de la sección.

Por eso, en la parte derecha, la línea de influencia se sombrea sólo dentro de los límites de este segmento, esto es, si

$$\frac{l}{2} \leqslant z < l + d.$$

2. La carga está a la izquierda de la sección

$$\left(-d \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}\right).$$

Examinemos el equilibrio del disco derecho

$$\sum M_C^{der} = -B\,\frac{l}{2} + N_{ab}h = 0, \text{ de donde } N_{ab} = B\,\frac{l}{2h} = \frac{z}{l}\cdot\frac{l}{2h}.$$

Esta expresión es la ecuación de la recta que, en correspondencia con la posición de la carga, se llama *recta izquierda*. También la construimos por dos puntos:

$$\text{cuando } z=0, \quad N_{ab}=0 \text{ y si } z=l, \quad N_{ab}=\frac{l}{2h}.$$

La parte izquierda de la línea de influencia se sombrea también sólo dentro de los límites del segmento de la recta izquierda, limitador de la línea de influencia, esto es, cuando $-d \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}$.

A los segmentos de las rectas derecha e izquierda, que limitan la línea de influencia, los vamos a llamar, en adelante, *partes útiles* de estas rectas.

Si la reacción buscada del vínculo no puede ser determinada directamente de una ecuación, como, por ejemplo, por el método de las secciones compatibles en los sistemas complejos, entonces, ésta se determina del sistema de ecuaciones con varias incógnitas. Al construir las líneas de influencia, los miembros libres de las ecuaciones representarán en sí no números, sino funciones de la posición de la carga $P = 1$ y, precisamente por eso, la resolución de las ecuaciones da la reacción en forma de funciones de la ubicación de la carga.

Hemos expuesto sólo las reglamentaciones generales, por las cuales deberemos guiarnos durante la construcción de las líneas de influencia por el método estático. Más adelante vamos a examinar algunos detalles. Conviene indicar, que el método estático de construcción de líneas de influencia es particularmente cómodo para calcular sistemas simples.

§ 80. CONSTRUCCION DE LINEAS DE INFLUENCIA POR EL METODO DE SUSTITUCION DE VINCULOS. En los sistemas complejos, la construcción de las líneas de influencia por el método estático presenta ciertas dificultades. En estos, la construcción de las líneas de influencia puede ejecutarse empleando el procedimiento de sustitución de vínculos.

Al construir las líneas de influencia, el miembro R_{kP} en (3.3) es la reacción del vínculo sustituyente k, debida a la fuerza rodante $P = 1$. Esta representa en sí, no ya un número, sino una función de la posición de la carga $P = 1$ y determina la *línea de influencia de la reacción del vínculo sustituyente k del sistema transformado*. De esta manera, las líneas de influencia de los vínculos sustituidos (eliminados) del sistema complejo se obtienen por medio de las líneas de influencia de las reacciones de los vínculos sustituyentes del sistema transformado. Dado que, por la idea del método de sustitución de vínculos, el sistema transformado debe ser simple, la construcción de las líneas de influencia de las reacciones de los vínculos sustituyentes no presenta dificultades, por cuanto ellas pueden ser construidas por el método estático.

Así, por ejemplo, puede ser construida la línea de influencia de la reacción de apoyo media X_1 en el sistema complejo de la fig. 57, *a*. Para esto, transformamos el sistema dado en simple, eliminando el

Fig. 57

vínculo de apoyo e introduciendo en su lugar la barra ab (fig. 57, b). La ecuación del método de sustitución de vínculos será

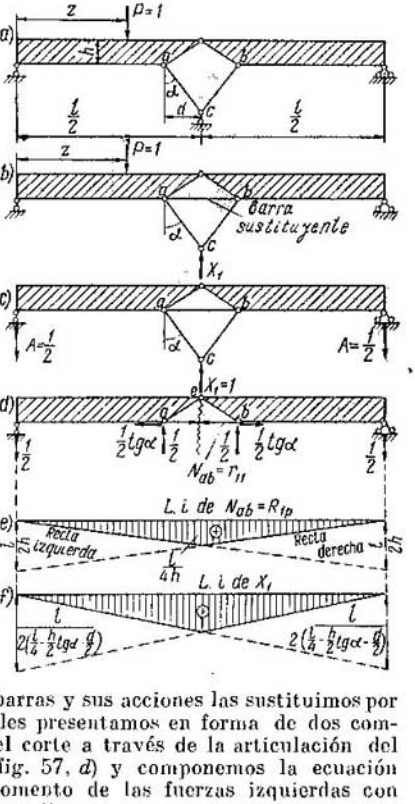
$$r_{11}X_1 + R_{1P} = 0,$$

donde r_{11} es la fuerza axil en la barra sustituyente ab, debida a la fuerza $X_1 = 1$ (fig. 57, c);

R_{1P} la función de la influencia de la reacción de la barra sustituyente ab.

Al determinar r_{11}, separamos al principio el nudo c y determinamos las fuerzas axiles en las barras ac y bc (fig. 57, d):

$$N_{ac} = N_{bc} = -\frac{1}{2\cos\alpha}.$$



Luego, eliminamos estas barras y sus acciones las sustituimos por las fuerzas halladas, a las cuales presentamos en forma de dos componentes. Después trazamos el corte a través de la articulación del medio e y de la barra ab (fig. 57, d) y componemos la ecuación de equilibrio en forma de momento de las fuerzas izquierdas con respecto a la articulación del medio:

$$\sum M_e^{izq} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\cdot h - N_{ab}h + \frac{1}{2}d = 0,$$

de donde

$$N_{ab} = r_{11} = -\frac{\frac{l}{4} - \frac{h}{2}\operatorname{tg}\alpha - \frac{d}{2}}{h}.$$

En la barra sustituyente, la línea de influencia se construye por las reglas usuales.

Ecuación de la recta derecha:

$$N_{ab} = \frac{l-z}{l}\cdot\frac{l}{2h}.$$

Ecuación de la recta izquierda:

$$N_{ab} = \frac{z}{l} \cdot \frac{l}{2h}.$$

La línea de influencia de la reacción de la barra sustituyente $a - b$ está construida en la fig. 57, *e*. La línea de influencia buscada de la reacción X_1 fue construida por la expresión $X_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}}$ (fig. 57, *f*).

§ 31. METODO CINEMATICO DE CONSTRUCCION DE LINEAS DE INFLUENCIA. La construcción de las líneas de influencia de las reacciones de los vínculos por el método cinemático está basada en las ideas de este método, expuestas durante la determinación de las reacciones de los vínculos, debidas a una carga fija. Sólo que aquí, en calidad de carga efectiva, tendremos únicamente la fuerza móvil $P = 1$. Como ya es sabido, al determinar las reacciones de los vínculos por el método cinemático, es indispensable excluir del sistema, transformándolo en monovariante, aquel vínculo cuya reacción se determina y sustituir la acción de éste sobre el sistema por las reacciones buscadas. Después es necesario dar al sistema un desplazamiento posible y sobre él componer la ecuación de los trabajos de todas las fuerzas actuantes sobre el sistema. Conviene hacer esto mismo también al construir las líneas de influencia. La ecuación de los trabajos para una sóla fuerza $P = 1$ es

$$1 \cdot \Delta_P + S\Delta_S = 0,$$

donde: Δ_P es el desplazamiento infinitesimal, vertical, de la línea de carga en el punto de aplicación de la carga móvil en el posible movimiento comunicado con respecto a la tierra.

Δ_S, el desplazamiento en la dirección del vínculo eliminado.

Por consiguiente:

$$\text{l.i. de } S = -\frac{\Delta_P}{\Delta_S}. \qquad (5.7)$$

La expresión obtenida muestra, *que la forma de las líneas de influencia de las reacciones del vínculo S se determina por el diagrama de desplazamientos verticales de la línea de carga* Δ_P, *en el desplazamiento posible dado, respecto a la tierra, del sistema con el vínculo eliminado*, dado que en el denominador la magnitud Δ_S es constante.

Esta es una deducción muy importante, cuyo empleo se hace imprescindible al verificar la forma de las líneas de influencia de las reacciones de los vínculos, obtenidas por cualquier método. De lo dicho se deduce, que para la construcción de las líneas de influencia, debidas a una carga vertical, por el método cinemático, es indispensable conocer el diagrama de los desplazamientos verticales Δ_P y la magnitud constante Δ_S.

En casos aislados, cuando la ley de la variación de las reacciones de apoyo, debidas a $P = 1$, es notoriamente conocida, resulta cómodo eliminar complementariamente un vínculo de apoyo y comunicar al sistema un movimiento posible, tomando como disco fijo no a la tierra, sino a uno de los discos del sistema con el vínculo eliminado. En este caso, en la ecuación de los trabajos, complementariamente, se incluirá el trabajo de la reacción del vínculo de apoyo eliminado.

En dependencia de cómo sean determinadas las magnitudes Δ_P y Δ_S en el desplazamiento infinitesimal dado, se distinguen el procedimiento de los centros instantáneos y el de los puntos representativos.

1. PROCEDIMIENTO DE LOS CENTROS INSTANTANEOS

El procedimiento de los centros instantáneos consiste en que el diagrama de los desplazamientos verticales Δ_P, en el posible desplazamiento dado con respecto a la tierra del sistema con un vínculo excluido, se construye por medio de los centros instantáneos recíprocos de rotación de los discos y de los centros instantáneos de rotación de éstos con respecto a la tierra. La magnitud Δ_S se determina también por medio de los mismos centros instantáneos.

Si han sido hallados todos los centros instantáneos exigidos de rotación de los discos, por los cuales pasa la línea de carga, la construcción del diagrama Δ_P se efectúa de manera muy simple.

El diagrama de los desplazamientos verticales de los discos se construye por las siguientes reglas:

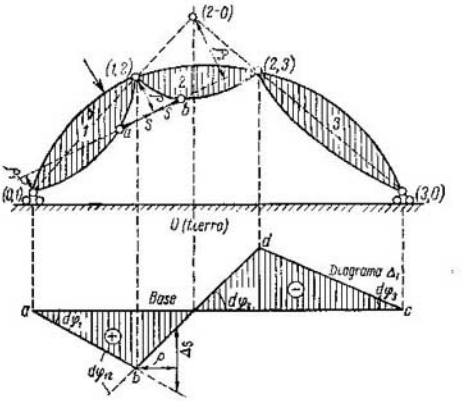
a) la línea de desplazamiento de cada disco es una recta que corta a la base por debajo del centro instantáneo de rotación del disco dado con respecto a la tierra;

b) las líneas de desplazamiento de dos discos se cortan por debajo de su centro instantáneo de rotación recíproco, por cuanto este último puede ser examinado como un sólo punto, que simultáneamente pertenece a ambos discos;

c) el ángulo de giro de uno de los discos se fijará arbitrariamente.

Así, por ejemplo, en la fig. 58, la línea de desplazamiento *ab* del primer disco ha sido trazada a través del punto *a* de la base, por debajo del centro instantáneo de rotación (*0, 1*), bajo el ángulo arbitrario $d\varphi_1$. Sobre esta línea bajamos el centro instantáneo (*1, 2*); obtenemos el punto *b*, a través del cual deberá pasar la línea de desplazamiento del segundo disco, dado que las líneas de desplazamiento de los discos primero y segundo deberán intersecarse por debajo del centro instantáneo recíproco. Además, la línea de desplazamiento del segundo disco deberá pasar por el punto *c* de la base, por debajo del centro (*2, 0*). La línea de desplazamiento del segundo disco será la *bc*. Sobre esta recta *bc* bajamos el centro instantáneo (*2, 3*) y obtenemos el punto *d*, a través del cual pasará la línea de desplazamiento del tercer disco, dado que ella deberá intersecarse con la del segundo por debajo del centro instantáneo (*2, 3*). La línea de desplazamiento del tercer disco deberá pasar, igualmente, a través

Fig. 58



del punto *e* de la base debajo del centro instantáneo (*3*, *0*). La recta *de* es la línea de desplazamiento del tercer disco.

De esta manera, el diagrama de los desplazamientos Δ_P ha sido construido. Su signo positivo indica que la dirección del desplazamiento coincide con la de la fuerza $P = 1$.

La magnitud del desplazamiento Δ_S, progresivo o rotatorio, en la dirección del vínculo eliminado, se determina, bien por el ángulo de giro recíproco de los dos discos, excluyendo el vínculo con momento, o bien, eliminando una barra, variando la distancia entre los dos puntos de aplicación de la reacción buscada a los dos discos.

Si ha sido excluido el vínculo con momento, entonces, el ángulo de giro recíproco de los dos discos se determina fácilmente por el diagrama de sus desplazamientos verticales, en el cual, el giro de cada disco se determina por el giro de la línea de desplazamientos verticales del disco dado. Pero, si el desplazamiento, por la dirección del vínculo eliminado, es la variación de la distancia entre los dos puntos de aplicación de las fuerzas a los dos discos, entonces, éste puede ser determinado por las siguientes reglas.

a) El desplazamiento se determina como la suma de los desplazamientos en la dirección de cada fuerza S por separado, por la expresión

$$\Delta_S = \pm \rho_k d\varphi_k \pm \rho_m d\varphi_m, \tag{5.8}$$

donde: ρ_k y ρ_m son las longitudes de las perpendiculares bajadas a la dirección de la fuerza S desde los centros instantáneos, con respecto a la tierra, de los discos k y m, a los cuales está aplicada la fuerza S, y $d\varphi_k$ y $d\varphi_m$, los ángulos de giro de los discos en el desplazamiento comunicado.

b) El desplazamiento se determina, como el desplazamiento de la fuerza S, aplicada a uno cualquiera de los dos discos; el otro se

supone fijo:

$$\Delta_S = \pm \rho d\varphi_{km}, \qquad (5.9)$$

donde: ρ es la longitud de la perpendicular bajada desde el centro instantáneo de rotación de los discos k y m, a los cuales está aplicada la fuerza S, sobre la dirección de esta fuerza y, $d\varphi_{km}$, el ángulo de giro recíproco de estos discos en el movimiento posible comunicado.

El segundo procedimiento de determinación del desplazamiento es más simple que el primero y, precisamente, es el que nosotros vamos a emplear. Para la determinación del signo del desplazamiento Δ_S es necesario girar mentalmente el disco alrededor de aquel centro de rotación desde el cual fue bajada la perpendicular ρ en el ángulo que le corresponde, tomado del diagrama de los desplazamientos verticales, y, por el desplazamiento de la fuerza S en el disco, juzgar sobre el signo de Δ_S. El desplazamiento será positivo, si está orientado en dirección de la acción de la fuerza S.

Con arreglo a la fig. 58, las expresiones (5.8) y (5.9) nos dan que

$$\Delta_S = \rho_1 d\varphi_1 - \rho_2 d\varphi_2; \ \Delta_S = -\rho\,(d\varphi_1 + d\varphi_2).$$

El segundo procedimiento permite, simplemente, determinar, por el diagrama de traslaciones Δ_P, la escala de la línea de influencia. La reacción incógnita, en valor absoluto será igual a la unidad, cuando $\Delta_P = \Delta_S$, lo que significa, que la ordenada, igual a Δ_S, debe buscarse en el diagrama de traslaciones Δ_P e igualarse a la unidad, lo cual determinará la escala de la línea de influencia. Para ello, tomando como principio el punto de intersección de las líneas de desplazamiento de los dos discos examinados, la longitud de la perpendicular ρ se traza horizontalmente en cualquier dirección (en la fig. 58 a la derecha del punto b); el segmento vertical entre las líneas de desplazamiento, con una longitud igual a Δ_S, se adopta como unidad.

Sigamos todo lo dicho con un ejemplo (fig. 59).

Eliminamos el vínculo $k - m$. Las articulaciones que unen a los discos entre sí determinan sus centros instantáneos de rotación. Tales serán los centros $(0, 1)$ $(2, 3)$ y $(3, 0)$. El centro recíproco $(1, 2)$ de los discos *1* y *2*, unidos con dos barras, se encuentra en la intersección de estas barras. Por la regla de los tres centros instantáneos, el centro instantáneo $(0, 2)$ se encuentra en la intersección de las rectas $0—1$, $1—2$ y $3—0$, $2—3$. Todos los centros instantáneos han sido hallados.

Construimos el diagrama de desplazamientos verticales. Al principio trazamos arbitrariamente la recta ab, o sea, la línea de desplazamiento del primer disco, a través del punto a de la base, por debajo del centro instantáneo $(0, 1)$. Luego, a través del punto b, perteneciente a la línea de desplazamiento del primer disco por debajo del centro instantáneo $(1, 2)$, y por el punto c, ubicado sobre la

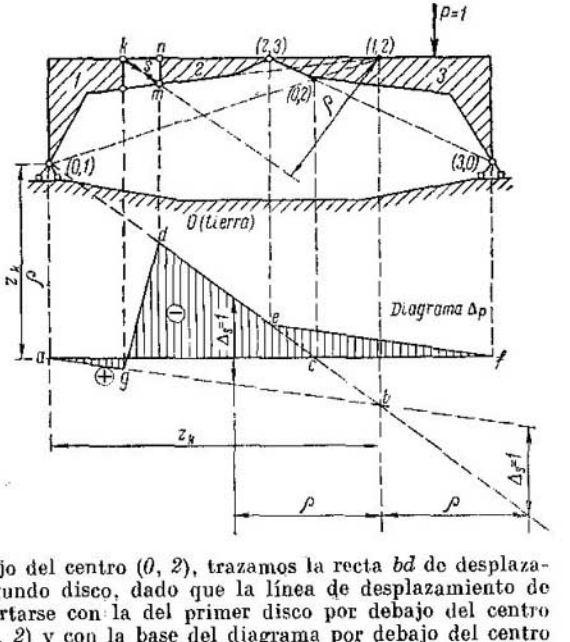


Fig. 59

base, por debajo del centro (*0*, *2*), trazamos la recta *bd* de desplazamiento del segundo disco, dado que la línea de desplazamiento de éste deberá cortarse con la del primer disco por debajo del centro instantáneo (*1*, *2*) y con la base del diagrama por debajo del centro (*0*, *2*). El desplazamiento del tercer disco se determina análogamente con la recta *ef*, trazada a través del punto *e*, sobre la línea de desplazamiento del segundo disco, por debajo del centro (*2*, *3*) y, del punto *f* de la base, por debajo del centro (*3*, *0*). El desplazamiento de la línea de carga entre los discos primero y segundo, esto es, entre los nudos *k* y *n*, se determina con la recta *gd*, dado que el punto *g* determina el desplazamiento del *k* del primer disco y, el punto *d*, el del *n* del segundo disco. De esta manera, el diagrama de desplazamientos Δ_P ha sido construido. Este por debajo de la base tiene signo positivo y, por arriba, negativo. La magnitud Δ_S se determinará, si desde el punto *b*, por debajo del centro (*1*, *2*), en la intersección de las líneas de desplazamiento de los discos primero y segundo, trazamos horizontalmente (en cualquier dirección) la longitud de la perpendicular ρ, bajada desde el centro (*1*, *2*) a la dirección de la reacción *S*, y medimos la ordenada vertical entre las líneas de desplazamiento de estos dos discos. Esta ordenada conviene tomarla por unidad, lo que servirá como escala para la línea de influencia, al pasar a ella del diagrama de traslaciones Δ_P.

El signo de la línea de influencia se determina de la siguiente manera. Supongamos que uno de los discos, por ejemplo, el primero,

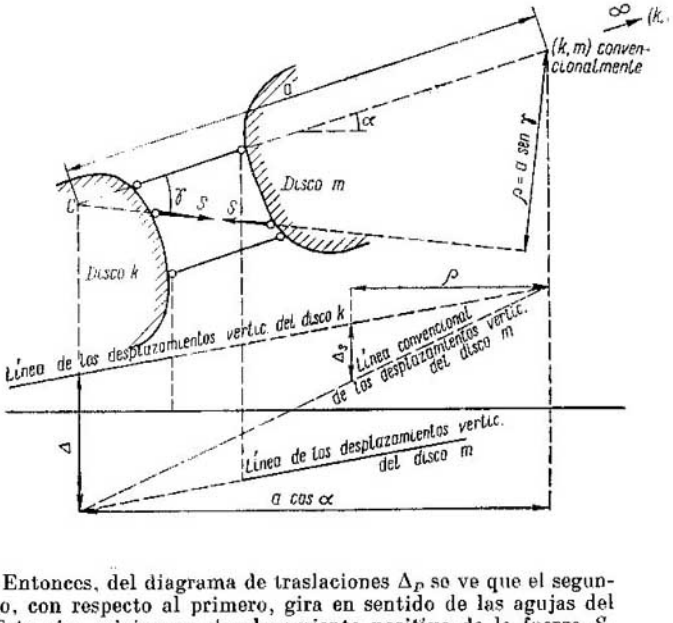


Fig. 60

es fijo. Entonces, del diagrama de traslaciones Δ_P se ve que el segundo disco, con respecto al primero, gira en sentido de las agujas del reloj. Este giro origina un desplazamiento positivo de la fuerza S, aplicada al segundo disco en rotación. Esto significa, que el desplazamiento es positivo y, entonces, de acuerdo con (5.7), el signo de la línea de influencia es contrario al del diagrama de desplazamientos Δ_P.

Si dos discos k y m, a los cuales están aplicadas las fuerzas S, están unidos con dos barras paralelas (fig. 60), su centro recíproco instantáneo (k, m) está en el infinito, en la intersección de estas barras, y las líneas de los desplazamientos verticales de los discos son paralelas. En este caso, la perpendicular ρ a la recta de acción de las fuerzas S, bajada desde el centro instantáneo, ubicado en el infinito, es igual al infinito y, el ángulo de giro recíproco de los discos $d\varphi_{km}$ es igual a cero. La expresión (5.9) da indeterminación. Mostremos cómo se desarrolla, conforme al esquema de la fig. 60. Para esto, supongamos, *convencionalmente*, que el centro instantáneo (k, m) se encuentra no en el infinito, sino en algún lugar a la derecha, sobre la prolongación de una de las barras paralelas que unen a los discos (por ejemplo, en la superior), a cierta distancia arbitraria a del punto de intersección C de la fuerza S con esta barra. De esta manera, $\rho = a \cdot \operatorname{sen} \gamma$. Ante tal suposición, las líneas de desplazamiento de los discos deberán intersecarse por debajo del centro convencional.

Trazemos la línea convencional de desplazamiento de uno de los discos, por ejemplo, del m, de modo que por debajo del punto C la ordenada Δ no varíe, y la recta corte a la línea de desplazamiento del disco k por debajo del centro convencional. De la semejanza de los triángulos obtenemos

$$\Delta_S = \Delta \frac{\rho}{a \cos \alpha}.$$

Esta expresión es correcta para cualquier valor de a, incluso también cuando $a = \infty$. En consecuencia,

$$\Delta_S = \Delta \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\cos \alpha}. \qquad (5.9a)$$

Si el vínculo excluido del sistema es sustituido por los momentos $\bar{M}$, por ejemplo, al introducir una articulación, entonces, el desplazamiento por la dirección de los momentos Δ_S es igual al ángulo de giro recíproco de los discos, a los cuales están aplicados los momentos:

$$\Delta_S = \pm d\varphi_k \pm d\varphi_m = \pm d\varphi_{km}. \qquad (5.9b)$$

El método de los centros instantáneos es relativamente simple sólo en aquellos casos cuando la determinación de los centros instantáneos de rotación de los discos, por los cuales pasa la línea de carga, no presenta dificultades.

2. MÉTODO DE LOS PUNTOS REPRESENTATIVOS

En el método de los puntos representativos, los trabajos de las fuerzas unitarias $P = 1$ y $S = 1$ iguales a los desplazamientos Δ_P y Δ_S, correspondientemente, se sustituyen por los momentos proporcionales de estas fuerzas con respecto a las imágenes de sus puntos de aplicación.

Por eso, sobre la base de la expresión (4.3) tendremos

$$\text{l.i. de } S = -\frac{\bar{M}_P}{\bar{M}_S}, \qquad (5.10)$$

donde: $\bar{M}_P$ es el momento de la carga vertical $P = 1$ con respecto a la imagen de su punto corriente de aplicación sobre la línea de carga y $\bar{M}_S$, el momento de las reacciones unitarias $S = 1$ con respecto a las imágenes de sus puntos de aplicación. Los momentos en sentido de las agujas del reloj son positivos.

Los momentos $\bar{M}_P$, numéricamente, son iguales a las longitudes de las perpendiculares bajadas desde los puntos representativos de la línea de carga a las verticales que pasan a través de los puntos iniciales. Las perpendiculares se hallan fácilmente en el plano de los puntos representativos. De igual manera se determina la magnitud $\bar{M}_S$.

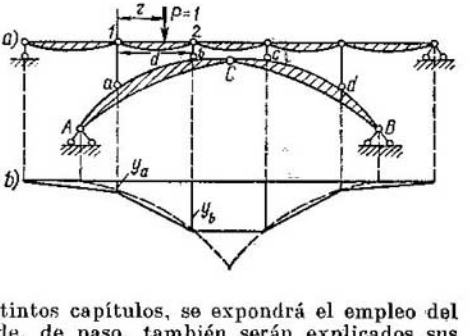


Fig. 61

Más adelante, en distintos capítulos, se expondrá el empleo del método cinemático donde, de paso, también serán explicados sus detalles.

§ 32. LINEAS DE INFLUENCIA EN EL CASO DE TRANSMISION NODAL DE LA CARGA. Al calcular estructuras, nos encontramos con casos cuando la carga rodante está aplicada, no a la parte fundamental del sistema, sino a las partes complementarias, que transmiten la presión a la parte fundamental sólo por determinados puntos (nudos), los *a*, *b*, *c* y *d* (fig. 61, *a*). La carga $P = 1$, dispuesta en el disco 1—2, se reparte sobre los montantes 1—*a* y 2—*b* por la ley de la palanca. La presión se transmite a la parte fundamental de la estructura en los puntos *a* y *b*. Tal transmisión de la carga lleva el nombre de *nodal*.

El cálculo de la transmisión nodal de la carga, al construir las líneas de influencia, se efectúa en base a los siguientes razonamientos. Aceptamos que la línea de influencia de una magnitud cualquiera *S*, ha sido construida sin tener en cuenta la transmisión nodal de la carga. Para generalizar los razonamientos, supongamos que la línea de influencia es curvilínea, por ejemplo, para la flexión de la articulación *C*. Sean y_a e y_b sus coordenadas por debajo de los nudos *a* y *b*. Para la carga $P = 1$ ubicada sobre los discos *1—2*, las presiones sobre los montantes *1—a* y 2—*b*, respectivamente, son iguales a:

$$R_a = \frac{d-z}{d}; \quad R_b = \frac{z}{d}.$$

Por la propiedad de la línea de influencia

$$S = 1 \cdot y = R_a y_a + R_b y_b = \frac{d-z}{d} y_a + \frac{z}{d} y_b.$$

Esta expresión determina la recta que pasa por las ordenadas y_a e y_b de la línea de influencia *S*, construida para la acción directa de la carga. De aquí se deduce la regla: *para construir las líneas de influencia, en caso de transmisión nodal de la carga, es necesario construirlas, inicialmente, sin tener en cuenta esta transmisión nodal, para la acción directa de la carga y, luego, llevar a ella los nudos de transmisión de la*

carga y unir los puntos vecinos con segmentos rectos. Precisamente, por tal regla se ejecutó la corrección de las líneas de influencia en la fig. 61, *b*.

§ 33. LA FUNCION DE INFLUENCIA Y SUS PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES. Llamaremos función de influencia a la función de algunas variables, que determina, en la forma general, la variación de cualquier magnitud en la estructura, no sólo en dependencia de sus dimensiones y de la ubicación de la carga unitaria móvil, sino también del lugar de la magnitud que se determina. Sea que tal función tiene el aspecto:

$$S = f(z, s),$$

donde: z es la coordenada de la carga móvil $P = 1$;
s es la coordenada del lugar de la magnitud estudiada.

Examinemos ciertas derivadas parciales.

Derivada parcial por la coordenada de la carga. Demostremos, que la derivada parcial, de la función de influencia de cualquier magnitud por la coordenada de la carga z, determina una nueva función de influencia de la misma magnitud, pero ahora ya, no del peso rodante $P = 1$, sino del momento concentrado móvil $\dot{M} = 1$.

Para la demostración presentamos al momento concentrado en forma de dos fuerzas verticales P, cuyo brazo es Δz, con tal cálculo que $\dot{M} = P\Delta z$. Por la propiedad de la línea de influencia, la magnitud calculada, debida a estas dos fuerzas de sentido opuesto, es igual a:

$$S_{\dot{M}} = Pf(z + \Delta z, s) - Pf(z, s).$$

Dado que $P = \frac{\dot{M}}{\Delta z}$, entonces,

$$S_{\dot{M}} = \dot{M}\frac{f(z+\Delta z, s) - f(z, s)}{\Delta z}.$$

Pasando al límite, obtenemos

$$S_{\dot{M}} = \dot{M}\frac{\partial f}{\partial z} = 1\,\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Esto significa que, efectivamente, la derivada parcial de la función de influencia por la coordenada de la carga móvil nos da una nueva función de influencia del momento móvil $\dot{M} = 1$, la ubicación del cual también se determina con la misma coordenada que la posición de la carga.

Derivada parcial por la coordenada de la sección. La derivada parcial por la coordenada de la sección se puede presentar como una nueva función de influencia de una nueva magnitud $\frac{\partial S}{\partial s}$ de la misma carga móvil $P = 1$. A veces, cuando $\frac{\partial S}{\partial s}$ tiene sentido físico, a esta nueva magnitud le corresponde un carácter real.

Así, por ejemplo, si $S = f(z, s)$ representa en sí la función de influencia de la flecha de flexión de una viga simple, entonces, $\frac{\partial S}{\partial s}$ representará la función del ángulo de giro originado por la misma carga $P = 1$. Pero, si S representa la función de influencia del momento M en la viga, $\frac{\partial S}{\partial s}$ representará la función de la fuerza transversal Q.

§ 34. DETERMINACION DE LAS MAGNITUDES ANALIZADAS, DEBIDAS A CARGAS DE DISTINTOS TIPOS, POR LAS LINEAS DE INFLUENCIA. Para generalizar los razonamientos, supongamos que la línea de influencia de cierta magnitud S es curvilínea (fig. 62). Aceptemos que su ecuación sea $y = f(z)$. Examinemos cargas de distintos tipos.

Fuerzas concentradas (fig. 62, *a*). En el caso de varias fuerzas tendremos que

$$S = \sum P_i y_i. \tag{5.11}$$

Esto significa, *que la magnitud S, debida a las cargas concentradas, se determina como la suma de los productos de las fuerzas por las ordenadas de las líneas de influencia, ubicadas debajo de ellas.*

Si en el punto de aplicación de cualquier fuerza P_i la línea de influencia tiene discontinuidad, la magnitud determinada tendrá

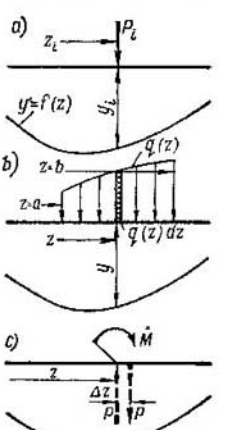


Fig. 62

dos valores, según sea el lugar en que examinemos esta fuerza, a la derecha o a la izquierda de la fractura.

Carga repartida (fig. 62, *b*). Examinando la fuerza elemental $q(z)\,dz$ como concentrada, en base a (5.11) obtenemos $dS = q(z)\,dz \cdot y$. El valor completo de S será igual a:

$$S = \int_a^b q(z)\, y\, dz. \tag{5.12}$$

Si $q(z) = q = \text{const}$, entonces,

$$S = q \int_a^b y\, dz = q\omega_a^b,$$

donde ω_a^b es el área de la figura limitada por la línea de influencia en el sector de acción de la carga q, a la que, en adelante, llamaremos simplemente superficie de la línea de influencia.

Por consiguiente, *la magnitud S, debida a la carga uniformemente repartida, se determina por el producto de la intensidad de la carga q por la superficie de la línea de influencia, ubicada por debajo de aquélla.*

Carga de momento (fig. 62, *c*). La acción del momento $\dot{M}$ en el punto de coordenada z la sustituimos por dos fuerzas verticales P con el brazo Δz. La magnitud S debida a estas fuerzas, por (5.11) es igual a:

$$S = Pf(z + \Delta z) - Pf(z).$$

Dado que $P = \frac{\dot{M}}{\Delta z}$, entonces,

$$S = \dot{M}\,\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Pasando al límite, tendremos

$$S = \dot{M} f'(z). \tag{5.13}$$

De esta manera, *la magnitud S, debida al momento externo $\dot{M}$, es igual al producto del momento por la tangente del ángulo de inclinación de la tangente a la línea de influencia en el punto de aplicación del momento.*

Para varios momentos

$$S = \sum \dot{M}_i f'(z_i). \tag{5.14}$$

Si en el punto de aplicación del momento externo $\dot{M}$ la línea de influencia tiene discontinuidad, entonces, la magnitud a determinar dependerá del lugar en que esté ubicado el momento $\dot{M}$, a la derecha o a la izquierda de la fractura.

§ 35. PROPIEDAD DE LA PARTE RECTA DE LA LINEA DE INFLUENCIA. Demostremos que, *al determinar una magnitud S, la carga ubicada sobre la parte recta de la línea de influencia de esta magnitud puede ser sustituida por la resultante R* (fig. 63). Para generalizar, supongamos que la carga está repartida. De acuerdo con (5.12), partiendo de simples consideraciones geométricas, podemos escribir

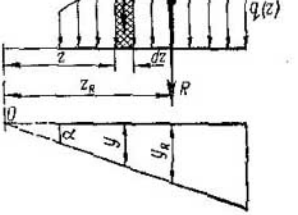


Fig. 63

$$S = \int_a^b q(z)\,dz y = \operatorname{tg}\alpha \int_a^b q(z)\,dz z.$$

Dado que $\int_a^b q(z)\,dzz = Rz_R$, tendremos que

$$S = \operatorname{tg}\alpha\, Rz_R = Ry_R, \tag{5.15}$$

o que justamente se exigía demostrar.

De la demostración expuesta se deduce también, que la integral del producto de dos funciones, una de las cuales es lineal, es igual a la multiplicación de la superficie del gráfico de una de ellas por la ordenada del gráfico de la función lineal, tomada por debajo del centro de gravedad de la primera figura.

§ 36. CONSTRUCCION DEL GRAFICO DE VARIACION DE LA MAGNITUD ESTUDIADA, EMPLEANDO LA LINEA DE INFLUENCIA. La determinación conjunta de la magnitud calculada $S_{cál}$ y la posición de cálculo de la carga rodante se efectúa de manera más completa, por medio de la construcción del gráfico de variación de la magnitud estudiada S, al pasar toda la carga rodante por la estructura. En los casos cuando puede ser empleado el principio de independencia de acción de las fuerzas, el gráfico de variación de la magnitud S puede ser construido por medio de su línea de influencia.

Este se construye en base a las siguientes consideraciones. La influencia, sobre la magnitud S, de la primera carga P_1 introducida en la estructura puede ser representada con la línea de influencia de S, multiplicada por el valor de esta carga. La influencia de la segunda carga P_2 comienza cuando la primera P_1 ya recorrió la distancia c_2, que lo separa de la segunda. Esta influencia de la carga P_2 también puede ser representada con la línea de influencia de S, multiplicada por P_2, pero desplazada con respecto al gráfico de influencia de P_1 en el valor c_2 (fig. 64, *b*). La influencia de la tercera carga P_3 comienza cuando P_1 recorrió la distancia c_3 hasta P_3. Esta influencia también puede ser representada por la línea de influencia de S, multiplicada por P_3 y desplazada en el valor c_3 con respecto al gráfico de influencia de P_1, etc.

La influencia de todas las cargas es igual a la suma de la influencia de cada una por separado, lo cual determina, precisamente, el gráfico de variación de la magnitud S. De esta manera, este último gráfico se obtiene sumando las líneas de influencia de S, multiplicadas por el valor de cada carga P_i y desplazadas de P_1 a la distancia c_i desde esta carga P_i hasta P_1. En la fig. 64, *a*, *b* y *c* se muestra la construcción del gráfico de S para tres cargas, cuando la línea de influencia es triangular.

El gráfico definitivo de S, para las líneas de influencia poligonales, se puede obtener con más facilidad de la siguiente manera. Cualquiera línea poligonal de influencia de S siempre puede ser representada, convencionalmente, como el diagrama de momentos en una viga simple de gran longitud, debidos a un grupo autoequilibrado de fuerzas, el cual se determina fácilmente por la línea de influencia. Tal grupo autoequilibrado de fuerzas, para la línea de in-

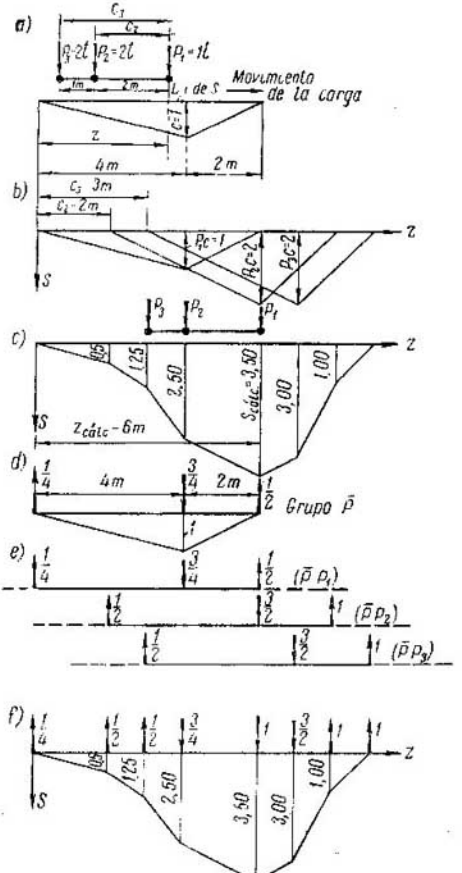


Fig. 64

fluencia triangular (fig. 64, *a*), está representado en la fig. 64, *d*. Designemos este grupo de fuerzas con el símbolo $\bar{P}$. Después de esto, podemos considerar el gráfico de S (fig. 64, *c*) como una suma de diagramas, cada uno de los cuales se construye del grupo de fuerzas $\bar{P}$ multiplicado sucesivamente por el valor de cada carga P_i y desplazado, cada vez, a lo largo del recorrido de la carga, con respecto al primer diagrama de cargas $P_1\bar{P}$, en la distancia c_i de cada carga P_i hasta P_1 (fig. 64, *b*). A continuación, en lugar de sumar los diagra-

mas aislados, es más *cómodo* obtener el diagrama definitivo de momentos (el gráfico de S), como diagrama de momentos de los grupos autoequilibrados de fuerzas $\overline{P}$, multiplicados por el valor de cada carga P_i y desplazados respecto al primer grupo de fuerzas a la distancia c_i (fig. 64, *e*). Todas estas fuerzas actuantes sobre una viga de gran longitud y determinantes del diagrama de momentos están representadas en la fig. 64, *f*.

Para un gran número de cargas móviles, la construcción completa del gráfico S es compleja. En tales casos, conviene limitarse a construirlo en las zonas de los valores extremos de S, donde cambia de signo el diagrama de las fuerzas transversales, debidas a la acción de las cargas autoequilibradas, que actúan sobre la viga del tipo representado en la fig. 64, *f*.

Aquí y en adelante deberemos tener en cuenta que, si la carga rodante puede moverse por la estructura en dos direcciones, como, por ejemplo, los automóviles, trenes, etc., por un puente, es indispensable determinar dos veces la posición de cálculo de la carga y sus correspondientes valores de cálculo de $S_{cál}$ en dependencia de la dirección de movimiento de la carga, para los dos signos de la magnitud S, si ambos son posibles. De los dos valores de $S_{cál}$ para cada signo de la magnitud S, se elige el de mayor valor absoluto. En aquellos casos, cuando es evidente que sólo en una dirección del movimiento de la carga tendremos la mayor magnitud por su valor absoluto, de uno u otro signo, entonces, desaparece la necesidad de determinar $S_{cál}$ en la otra dirección. Si la parte de la línea de influencia está cargada simétricamente, cualquiera que sea su aspecto, y los pesos son idénticos por su magnitud y equidistan uno de otro, la dirección de movimiento de la carga no juega ningún papel.

§ 37. DETERMINACION DE LA POSICION DE CALCULO DE UNA CARGA RODANTE POR LAS LINEAS DE INFLUENCIA CONTINUAS. La tarea inmediata, al determinar $S_{cál}$, debida a una carga rodante, es la de encontrar su posición teórica. Este problema puede ser resuelto, de manera más completa, construyendo el gráfico de variación de la magnitud S, empleando la l.i. (v. § 36). Pero tal vía es larguísima.

Por cuanto, al desplazarse la carga, los mayores y menores valores de la magnitud $S = f(z)$ siempre coinciden con los puntos de máximo y mínimo, y éstos pueden ser varios, entonces, es necesario buscar la posición de cálculo entre aquellas posiciones que nos den estos máximos y mínimos. Por consiguiente, antes que nada, la determinación de la posición de cálculo de la carga rodante está ligada a que se hallen aquellas de sus posiciones en las que $S = f(z)$, alcanza sus valores extremos.

Si la función $S = f(z)$, determinada por la línea de influencia, en la cual la coordenada z fija la posición de la carga sobre la construcción, es continua, con su primera derivada también continua, entonces, los valores límites de esta función, entre los cuales tam-

bién estará $S_{cál}$, se hallan por vía corriente. Para esto es necesario igualar a cero la derivada $\frac{dS}{dz}$. Las raíces de la ecuación obtenida z_i dan la posición de la carga, en las que la función S alcanza sus valores extremos. Entre ellos también estará $S_{cál}$. Pero tales funciones se encuentran con relativa rareza. Con más frecuencia, las funciones $S = f(z)$ son discontinuas, o con la primera derivada discontinua, lo que depende del carácter de la carga rodante y de la forma de la línea de influencia de S. En tales casos, los máximos y mínimos se determinan por las condiciones (5.3)—(5.6).

La variedad de las cargas rodantes y de las formas de las líneas de influencia no permite dar, para la determinación de la posición de cálculo, reglas generales, únicas, más concretas que las condiciones indicadas. Por esta razón surge la necesidad de confeccionar unas reglas más concretas, para algunos tipos de cargas, aunque sean particulares, para formas también particulares de las líneas de influencia, que frecuentemente encontramos en la práctica. Examinemos algunas de ellas.

1. LINEA DE INFLUENCIA POLIGONAL (FIG. 65)

Para comenzar, examinemos una línea de influencia poligonal, con signo positivo solamente, y por ella determinemos la posición de cálculo de la carga rodante, compuesta por fuerzas concentradas,

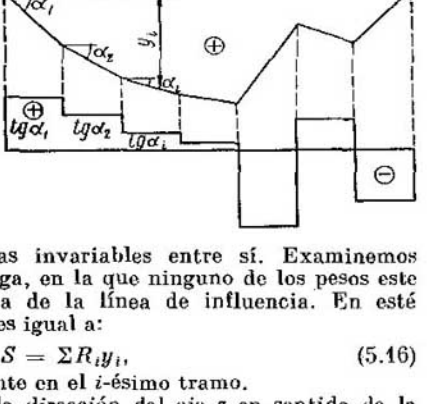


Fig. 65

que mantienen las distancias invariables entre sí. Examinemos una posición casual de la carga, en la que ninguno de los pesos este ubicado sobre ninguna cresta de la línea de influencia. En esté caso, la magnitud buscada S es igual a:

$$S = \Sigma R_i y_i, \tag{5.16}$$

donde R_i es la fuerza resultante en el i-ésimo tramo.

Consideraremos positiva la dirección del eje z en sentido de la carga rodante, en nuestro caso, a la derecha.

Desplazando la carga hacia la derecha a dz, obtenemos el incremento S:

$$dS = \Sigma R_i dy_i = \Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i \, dz,$$

de donde se desprende que

$$\frac{dS}{dz} = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i. \tag{5.17}$$

Por consiguiente, mientras que, durante el movimiento de la carga, no acontezcan cambios de los valores R_i, la derivada $\frac{dS}{dz}$ será una magnitud constante, pero la propia función S crecerá o decrecerá linealmente. Esto significa, que el gráfico de la variación de S será poligonal, en el cual los valores extremos se calculan por las condiciones (5.3) y (5.4) y, en el caso general, están ligados con la variación del signo de $\frac{dS}{dz}$. La propia variación del signo de $\frac{dS}{dz}$, como se puede ver de (5.17), es posible *sólo* con la variación, por lo menos, de uno de los valores de R_i, lo cual, a su vez, *únicamente* es posible, al pasar, aunque sea un solo peso de uno de los tramos al vecino. Esto también está ligado con el paso de la carga por la cresta de la línea de influencia. Esto significa, *que los valores extremos de S pueden ser posibles, sólo cuando, por lo menos, un peso cualquiera se halle sobre una de las creastas de la línea de influencia.*

A tal peso lo llamaremos *crítico*, designándolo por P_{crit}, y a aquel de los pesos críticos que, simultáneamente, también determine la posición de cálculo de la carga, *crítico de cálculo*, designándolo $P_{\text{crit. cál}}$. Frecuentemente, (¡pero no siempre!), el peso crítico suele ser uno solo, entonces, éste es, además, crítico de cálculo.

Demostremos que, si el peso crítico pasa por una cima convexa de la línea de influencia, independientemente de su signo, entonces, sólo puede haber el máximo valor absoluto de la magnitud, pero, si pasa por una no convexa, entonces, el mínimo.

Para la demostración examinemos la línea de influencia con signo positivo. El incremento de la tangente en la cima convexa es negativo, $\Delta \operatorname{tg} \alpha < 0$, y en la no convexa, positivo, $\Delta \operatorname{tg} \alpha > 0$.

Cuando el peso atraviesa una cresta convexa, de acuerdo con (5.17), el incremento $\Delta \frac{dS}{dz}$ es igual a:

$$\Delta \frac{dS}{dz} = \Delta \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i = P_{\text{crit}} (\operatorname{tg} \alpha_{\text{der}} - \operatorname{tg} \alpha_{\text{izq}}) = P_{\text{crit}} \Delta \operatorname{tg} \alpha < 0,$$

lo cual sólo puede ser para el máximo de S.

Al pasar el peso por una cresta no convexa, el incremento $\Delta \frac{dS}{dz}$ es igual a:

$$\Delta \frac{dS}{dz} = \Delta \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i = P_{\text{crit}} (\operatorname{tg} \alpha_{\text{der}} - \operatorname{tg} \alpha_{\text{izq}}) = P_{\text{crit}} \Delta \operatorname{tg} \alpha > 0,$$

lo cual sólo puede ser para el mínimo de S.

Si varios pesos pasan, simultáneamente, a través de cúspides convexas o de cúspides no convexas, lo cual puede corresponder al máximo o al mínimo, respectivamente, todas las deducciones se conservan. Si los pesos pasan de uno en uno o varios simultáneamente por cúspides convexas y no convexas, entonces, puede haber máximo o mínimo.

Si examinamos la línea de influencia con signo negativo, llegaremos a una deducción análoga.

Por consiguiente, *la posición de cálculo de una carga sobre una línea de influencia unívoca, que determina el máximo en valor absoluto de la magnitud buscada, puede ser factible solamente cuando por lo menos un peso cualquiera se encuentra sobre cualquier cresta convexa de la línea de influencia, independientemente de su signo.*

Como corolario de esto, los pesos situados al principio y al final de la línea de influencia solamente en sus crestas nulas para una distribución circunstancial de los pesos restantes, no pueden ser críticos de cálculo.

Hemos obtenido una regla para la determinación de la posición de cálculo de la carga rodante, que, aunque no sea del todo perfecta, por cuanto ésta todavía no indica cúal es el peso y sobre qué cresta convexa deberá ubicarse para que la posición de la carga resulte de cálculo, con todo, es muy útil. Además, conviene tener en cuenta que, en general, esta regla determina los máximos y mínimos que pueden no ser necesariamente de cálculo. Para la línea de influencia triangular esta regla resulta más concreta, lo que será examinado más adelante. De todos los modos, aquí, la cuestión sobre la posición de cálculo de la carga se resuelve por medio de pruebas. Se ponen en claro todas las posiciones de la carga, en las cuales tendremos los máximos de S, si la línea de influencia es positiva y, los mínimos, si es negativa. La presencia del máximo o del mínimo se establece por la siguiente regla.

Por la expresión (5.17) se determina dos veces la magnitud $\frac{dS}{dz}$; una, cuando el peso ubicado sobre la cima de la línea de influencia se refiere a la resultante del tramo posterior de la línea de influencia, en sentido de la marcha de la carga ((movimiento de la carga hacia atrás), y otra, cuando se refiere a la resultante del tramo anterior, según se va realizando la carga (movimiento de la carga hacia adelante). Si, al determinar el máximo, se satisface, por lo menos, una condición extrema de (5.3) o, al determinar el mínimo, una condición de (5.4), esto significa que hallaremos el máximo o el mínimo de la función $S = f(z)$. Si en la posición investigada, hallando el máximo, en ambos casos $\frac{dS}{dz} > 0$ y, al hallar el mínimo, $\frac{dS}{dz} < 0$, entonces, el máximo o el mínimo no se ha alcanzado; el peso elegido no puede ser crítico sobre la cresta de la línea de influencia y deberemos desplazar la carga hacia adelante. Pero, si al hallar el máximo $\frac{dS}{dz} < 0$, y al hallar el mínimo $\frac{dS}{dz} > 0$, entonces, en

ambos casos, el máximo o mínimo ha sido sobrepasado, el peso elegido tampoco puede ser crítico y deberemos desplazar la carga hacia atrás. Y así, hasta que no se satisfagan las condiciones extremas (5.3) o (5.4).

En los casos cuando, aparte del peso crítico, sobre cualquiera de las crestas de la línea de influencia, resultara uno o ambos pesos a la vez, los P_{izq} y P_{der}, sobre las ordenadas en cero de la línea de influencia, entonces, al emplear las desigualdades (5.3) o (5.4), éstos deberán ser incluidos, por orden, en la expresión (5.17). Al desplazar la carga hacia la izquierda, se incorpora el peso P_{der} y, al desplazarla hacia la derecha, el P_{izq}.

Si junto con las cargas concentradas existen cargas repartidas, la determinación de la posición de la carga para los máximos o mínimos de S se puede realizar por la regla expuesta más arriba, sustituyendo la carga repartida por una cantidad infinitamente grande de pesos infinitesimales concentrados. En este caso, conviene tener en cuenta, que cualquier peso infinitesimal concentrado, ubicado sobre cualquier cresta de la línea de influencia, para cualquier posición de las fuerzas restantes, puede ser crítico. Si el peso crítico es un peso infinitesimal, desprendido de una carga repartida y, además, no hay pesos de magnitud finita, ubicados sobre alguna de las crestas de la línea de influencia, es suficiente que $\frac{dS}{dz} = 0$.

El interrogante sobre cuál de los pesos concentrados será el crítico, el de magnitud finita o infinitesimal, se resuelve a través de pruebas. Para ello se recomienda dibujar el esquema de carga rodante sobre papel calco, en la misma escala longitudinal en que fue construida la línea de influencia, colocarlo sobre esta última y, luego, efectuar el desplazamiento de la carga y la evaluación de $\frac{dS}{dz}$ por (5.17). En este caso, es útil tener debajo de la línea de influencia el gráfico de las tangentes de los ángulos de giro de sus partes rectilíneas.

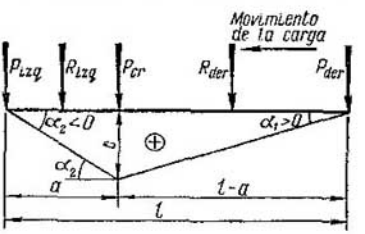
Pasemos ahora a examinar las líneas de influencia poligonales con dos signos. Si la carga rodante está compuesta por cargas sueltas, por ejemplo, automóviles, tranvías, trolebuses, etc., con las distancias mínimas prefijadas entre ellos, entonces, ésta puede ser distribuida sobre la construcción con intervalos, en forma de partes que contienen un número entero de unidades de carga independientes. En este caso, al determinar $+S$, es indispensable colocar la carga sobre todos los tramos positivos de la línea de influencia y, al determinar $-S$, sobre todos los negativos. En este caso, cada tramo de la línea de influencia es considerado como unívoco, y sobre él se emplea la regla de carga indicada más arriba. Si parte de los pesos resultaran sobre la parte vecina de la línea de influencia de otro signo, entonces, al determinar S, éstos deberán ser considerados o excluídos del examen, si lo permite el tipo de carga.

2. LINEA DE INFLUENCIA TRIANGULAR (FIG. 66)

En este caso particular, pero con el que nos encontramos frecuentemente, cuando la parte cargada de la línea de influencia tiene forma triangular, es posible expresar la condición de la carga, para el máximo de S, en forma más simple.

Examinemos primeramente una carga rodante compuesta por las fuerzas concentradas P. Aceptemos que está ubicada en la posición en que nos dé $S_{máx}$. Para generalizar, supongamos que, además del peso crítico, sobre la cresta central de la línea de influencia se hallan, en sus extremos, los pesos P_{izq} y P_{der}. Al peso colocado sobre la cresta central lo designamos con P_{crit}. Todos los

Fig. 66



pesos colocados sobre el sector izquierdo, a exclusión de P_{izq} y P_{crit}, fueron sustituidos por la resultante general R_{izq} y, sobre el sector derecho, a exclusión de P_{der} y P_{crit}, por la resultante R_{der}. Para deducir la fórmula, suponemos que el movimiento de la carga es de derecha a izquierda.

Según la condición extrema (5.3), mientras el peso P_{crit} no llegue a la cresta de la línea de influencia, tendremos

$$(R_{der} + P_{crit}) \operatorname{tg} \alpha_1 + (R_{izq} + P_{izq}) \operatorname{tg} \alpha_2 \gtreqless 0,$$

pero, en cuanto que ha pasado la cresta

$$(R_{der} + P_{der}) \operatorname{tg} \alpha_1 + (R_{izq} + P_{crit}) \operatorname{tg} \alpha_2 \lesseqgtr 0.$$

Dado que $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{c}{l-a}$, y $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{c}{a}$,

entonces, estas desigualdades se pueden escribir así:

$$\frac{R_{izq} + P_{izq}}{a} \lesseqgtr \frac{R_{der} + P_{crit}}{l-a}\ ; \quad \frac{R_{izq} + P_{crit}}{a} \gtreqless \frac{R_{der} + P_{der}}{l-a}. \tag{5.18}$$

Estas se pueden presentar en una forma más simple:

$$\left.\begin{aligned} R_{izq} + P_{izq} &\lesseqgtr \frac{a}{l}\left(\sum P_i + P_{izq}\right); \\ R_{izq} + P_{crit} &\gtreqless \frac{a}{l}\left(\sum P_i + P_{der}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

donde:

$$\sum P_i = R_{izq} + P_{crit} + R_{der} \text{ (sin los pesos extremos).}$$

Las fórmulas (5.19) son también justas para el movimiento de la carga de izquierda a derecha. No obstante, en este caso, a veces son más cómodas las siguientes fórmulas, obtenidas del mismo modo:

$$R_{\text{der}} + P_{\text{der}} \leqq \frac{l-a}{l}\left(\sum P_i + P_{\text{der}}\right); \qquad R_{\text{der}} + P_{\text{crít}} \geqq \frac{l-a}{l}\left(\sum P_i + P_{\text{izq}}\right). \tag{5.19'}$$

Si conjuntamente con las cargas concentradas hubiera cargas repartidas, entonces, como ya lo señalamos, el máximo de S puede aparecer, aunque sobre ninguna cresta de la línea de influencia no se encuentre ninguno de los pesos concentrados. En este caso, es imprescindible que

$$R_{\text{izq}} = \frac{a}{l}\sum P_i. \tag{5.20}$$

Si con cargas repartidas, las fuerzas concentradas resultaran sobre las ordenadas extremas nulas de la línea de influencia, entonces, para $P_{\text{crít}} = 0$, la posición de cálculo de la carga deberá satisfacer las condiciones (5.19). Todas las deducciones obtenidas son justas también para $S_{\text{mín}}$, si la línea de influencia de S es negativa.

Ejemplo 6. Determinar la posición de cálculo de una locomotora por la línea de influencia (fig. 67) y el valor teórico de S.

El movimiento de la carga es *de derecha a izquierda* (fig. 67, *a*). La longitud de la línea de influencia es mayor que la distancia entre el primero y el último

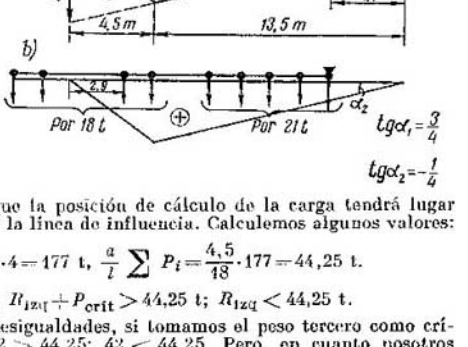


Fig. 67

peso. Por eso, suponemos, que la posición de cálculo de la carga tendrá lugar estando todos los pesos sobre la línea de influencia. Calculemos algunos valores:

$$\sum P_i = 21{\cdot}5 + 18{\cdot}4 = 177 \text{ t}, \quad \frac{a}{l}\sum P_i = \frac{4{,}5}{18}\cdot 177 = 44{,}25 \text{ t}.$$

Por la expresión (5.19), $R_{\text{izq}} + P_{\text{crít}} > 44{,}25$ t; $R_{\text{izq}} < 44{,}25$ t.

Satisfaceremos a estas desigualdades, si tomamos el peso tercero como crítico. En este caso, $42 + 22 > 44{,}25$; $42 < 44{,}25$. Pero, en cuanto nosotros ubicamos la carga sobre la línea de influencia, resulta, que el último peso sale fuera de sus límites, puesto que la distancia desde la cresta de la línea de influencia hasta el final es de 13,5 m y desde el tercer peso hasta el último, de 13,9 m. Es indispensable un recálculo.

Sin el último peso:

$$\sum P_i = 159 \text{ t}, \quad \frac{a}{l} \sum P_i = \frac{4,5}{48} 159 = 39,75 \text{ t}.$$

El tercer peso ya no puede ser crítico. Lo será el segundo. En este caso $R_{\text{izq}} = 21$ t.

Cuando el segundo peso está ubicado sobre la cresta de la línea de influencia, el penúltimo resulta fuera de sus límites. Es necesario un nuevo recálculo.

Sin el penúltimo peso: $\sum P_i = 141$ t, $\frac{a}{l} \sum P_i = \frac{4,5}{48} 141 = 35,25$ t.

El segundo peso permanece crítico.

Calculamos S:

$$S = \sum P_i y_i = \frac{3}{4} [21 (2,9+4,5)] + \frac{1}{4} [21 (11,9+10,3+8,7) + 18 (5,7+4,1)] =$$

$$= 322,875 \text{ tf } [y].$$

El movimiento de la carga es de izquierda a derecha (fig. 67, *b*). Para todas las cargas sobre la línea de influencia, $\Sigma P_i = 177$ t, $\frac{a}{l} \Sigma P_i = 44,25$ t. El peso crítico puede ser el tercero del ténder desde su extremo.

En este caso, $2 \cdot 18 < 44,25$ y $2 \cdot 18 + 18 > 44,25$ y el primer peso del ténder queda fuera de los límites de la línea de influencia, dado que $6,1 > 4,5$. Realicemos el cálculo sin este peso. El segundo peso del ténder está colocado sobre la ordenada de cero. Por eso, $P_{\text{izq}} = 18$ t, $\Sigma P_i = 141$ t, $R_{\text{izq}} = 0$. Por la expresión (5.19) obtenemos

$$[0 + 18 < \frac{4,5}{18} 141; \quad 0 + 18 < \frac{4,5}{18} (141 + 18).$$

En ambos casos, el primer miembro de la desigualdad resultó menor que el segundo. Esto significa, que el máximo fue pasado de largo, debemos mover la carga hacia atrás.

Colocamos el cuarto peso, desde el extremo del ténder, sobre la cresta. En este caso, $\Sigma P_i = 141$ t; $\frac{a}{l} \sum P_i = 35,25$ t, $R_{\text{izq}} = 18$ t, $P_{\text{crít}} = 18$ t. Por la expresión (5.19), $18 + 18 > 35,25$; $18 + 0 < 35,25$.

Por consiguiente, el cuarto peso es el crítico:

$$S = \frac{3}{4} [18 (2,9+4,5)] +$$

$$+ \frac{1}{4} [21 (4,1+5,7+7,3+8,9+10,5)] = 291,525 \text{ t } (y).$$

En este caso, otros máximos de cálculo no hay. De los dos elegimos el mayor, el cual, precisamente, será la magnitud de cálculo $S_{\text{cál}} = 322,875$ tf (y).

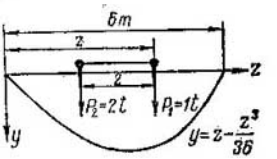
3. LINEA DE INFLUENCIA LISA, CURVILINEA

La magnitud S, en el caso de una línea de influencia lisa, curvilínea, hasta para pesos concentrados, se determina, en la forma general, de una función continua con la primer derivada también continua. Por eso, el problema se reduce a hallar el máximo o el mínimo de esta función. Para esto es indispensable: 1) componer la expresión analítica de S en función de la coordenada corriente de uno de los pesos de la carga ubicada sobre la línea de influencia; 2) tomar la primera derivada y determinar z_0 para la cual ésta se

convierte en cero; 3) cerciorarse de que, para z_0, todos los pesos permanecen dentro de los límites da la línea de influencia; 4) componer la expresión de la segunda derivada y, por su signo, siendo $z = z_0$, juzgar sobre la presencia del máximo o mínimo; 5) calcular el valor teórico $S_{cál}$.

Ejemplo 7. Determinar la posición de cálculo de la carga por la línea de influencia curvilínea y el valor teórico de S (fig. 68).

Fig. 68



La ecuación de la línea de influencia es $y = z - \frac{z^3}{36}$.

Componemos la expresión de S:

$$S = f(z) = 1\left(z - \frac{z^3}{36}\right) + 2\left[(z-2) - \frac{(z-2)^3}{36}\right].$$

Diferenciando, obtenemos

$$\frac{dS}{dz} = \frac{-3z^2 + 8z + 28}{12} = 0,$$

de donde encontramos $z_0 = \frac{14}{3}$ m;

$$S_{cál} = 1\left[\frac{14}{3} - \frac{1}{36}\left(\frac{14}{3}\right)^3\right] + 2\left[\left(\frac{14}{3} - 2\right) - \frac{\left(\frac{14}{3} - 2\right)^3}{36}\right] = \frac{496}{81}\ t\ (y).$$

§ 38. DETERMINACION DE LA POSICION DE CALCULO DE UNA CARGA RODANTE POR CIERTAS LINEAS DE INFLUENCIA DISCONTINUAS. Si la línea de influencia tiene discontinuidad, entonces, para pesos concentrados, la función $S = f(z)$ es discontinua, dado que a cada peso concentrado, que pasa por la fractura de la línea de influencia, le corresponden dos valores de la magnitud S. Para que el peso que pasa por la fractura de la línea de influencia sea crítico, y los pesos pueden ser muchos, deberán ser cumplidas las condiciones (5.5) y (5.6). Por cuanto a nosotros nos interesa la mayor magnitud de S en valor absoluto, independientemente de su signo, vamos a satisfacer las condiciones (5.5), las cuales escribimos así:

$$\begin{aligned} &\text{Si } \Delta S > 0, \ \frac{dS}{dz} = \Sigma R_i \operatorname{tg}\alpha_i \leqslant 0 \\ &\qquad \text{(después del paso del peso crítico por la fractura);} \\ &\text{para } \Delta S < 0, \ \frac{dS}{dz} = \Sigma R_i \operatorname{tg}\alpha_i \geqslant 0 \\ &\qquad \text{(antes del paso del peso crítico por la fractura).} \end{aligned} \qquad (5.24)$$

Durante el cálculo de $S_{máx}$ y $S_{mín}$, como peso crítico deberemos tomar el situado sobre la ordenada de mayor valor absoluto.

Si la línea de influencia tiene forma de triángulo rectángulo (fig. 69), entonces, para cualquier magnitud de la ΣP_i, una de las condiciones de (5.21) es cumplida. Lo que significa, que cada peso sobre la cresta de la línea de influencia será crítico. Tendremos la posición de cálculo de la carga, para aquel peso crítico que determine el mayor valor de todas las $S_{máx}$.

Examinemos ahora la línea de influencia triangular con ruptura en el vértice. A la ordenada derecha la designaremos siempre por c

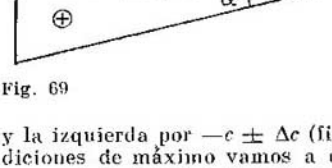


Fig. 69

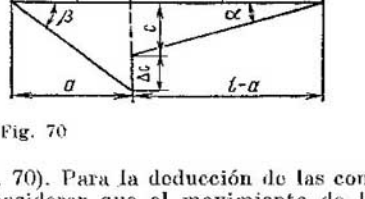


Fig. 70

y la izquierda por $-c \pm \Delta c$ (fig. 70). Para la deducción de las condiciones de máximo vamos a considerar que el movimiento de la carga es de derecha a izquierda.

La ordenada izquierda es mayor que la derecha $(\Delta c > 0)$. Por (5.21)

$$\frac{dS}{dz} = (R_{der} + P_{der}) \operatorname{tg} \alpha + (R_{izq} + P_{cr}) \operatorname{tg} \beta \leqslant 0.$$

Mostremos las sucesivas transformaciones de esta expresión:

$$(R_{der} + P_{der}) \frac{c}{l-a} - (R_{izq} + P_{cr}) \frac{c+\Delta c}{a} \leqslant 0;$$

$$(R_{izq} + P_{cr})(l-a)\left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) \geqslant a (R_{der} + P_{der}).$$

Agregando iguales valores en los miembros primero y segundo, obtenemos que

$$(R_{izq} + P_{cr})(l-a)\, 1 + \frac{\Delta c}{c} + (R_{izq} + P_{cr})\, a \geqslant$$
$$\geqslant a (R_{der} + P_{der} + R_{izq} + P_{cr}),$$

de donde

$$R_{izq} + P_{cr} \geqslant \frac{a}{l + (l-a)\frac{\Delta c}{c}} (\Sigma P_i + P_{der}), \qquad (5.22)$$

aquí

$$\Sigma P_i = R_{izq} + P_{cr} + R_{der} \text{ (sin los pesos extremos).}$$

Esta misma expresión (5.22) obtenemos con el movimiento de la carga de izquierda a derecha.

La ordenada izquierda es menor que la derecha ($\Delta c < 0$). Por (5.21)

$$\frac{dS}{dz} = (R_{der} + P_{cr}) \operatorname{tg} \alpha + (R_{izq} + P_{izq}) \operatorname{tg} \beta \geqslant 0.$$

Una de las expresiones intermedias durante la transformación es

$$(R_{izq} + P_{izq})(l - a)\left(1 - \frac{\Delta c}{c}\right) + a(R_{izq} + P_{izq}) \leqslant$$
$$\leqslant a(R_{der} + P_{cr} + R_{izq} + P_{izq}),$$

de donde tendremos que

$$R_{izq} + P_{izq} \leqslant \frac{a}{l - (l - a)\frac{\Delta c}{c}} (\Sigma P_i + P_{izq}). \qquad (5.23)$$

Esta expresión también es correcta, cuando el movimiento del peso es de izquierda a derecha.

Recordemos una vez más, que los pesos críticos determinados por (5.22) y (5.23) pueden ser varios. Para el movimiento de los pesos de derecha a izquierda, la desigualdad (5.22) determina sólo el primero de los pesos críticos y la (5.23), el último.

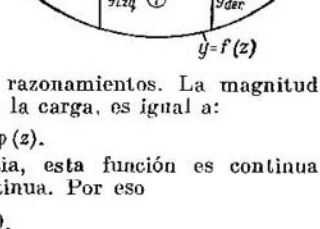
§ 39. DETERMINACION DE LA POSICION DE CALCULO DE UNA CARGA RODANTE, UNIFORMEMENTE REPARTIDA POR CUALQUIER LINEA DE INFLUENCIA UNIVOCA. Si la carga uniformemente repartida es continua y su longitud no es menor que la de la línea de influencia, entonces, el interrogante sobre la posición de cálculo de la carga se resuelve simplemente. En este caso, es necesario cargar toda la línea de influencia y determinar la magnitud de cálculo $S_{cál}$ por la fórmula

$$S_{cál} = q\omega, \qquad (5.24)$$

donde ω es la superficie completa de la línea de influencia.

Si la carga uniforme es continua, pero su longitud es menor que la de la línea de influencia (fig. 71), la posición crítica de la carga

Fig. 71



se determina en base a los siguientes razonamientos. La magnitud S, en una posición circunstancial de la carga, es igual a:

$$S = q\omega_{z-c}^{z} = \varphi(z).$$

Para cualesquiera líneas de influencia, esta función es continua con la primera derivada también continua. Por eso

$$\frac{dS}{dz} = q\frac{d\omega}{dz} = 0.$$

Por consiguiente, tendremos la posición crítica de la carga cuando $\frac{d\omega}{dz} = 0$. Al desplazarse la carga en un valor dz, tenemos que

$$d\omega = +y_{der}\, dz - y_{izq}\, dz = 0,$$

de donde

$$y_{der} = y_{izq}. \tag{5.25}$$

Así pues, la posición crítica del trozo de carga uniforme será tal, que las ordenadas de la línea de influencia, debajo de sus extremos izquierdo y derecho, son iguales entre sí.

Si le carga uniformemente repartida está compuesta de trozos sueltos (fig. 72, *a*) de diferente intensidad y su longitud total es menor que la de la línea de influencia, entonces,

$$dS = qd\omega = \Sigma q_i\,(y_i^{der} - y_i^{izq})\,dz = 0,$$

de donde

$$\Sigma q_i y_i^{der} = \Sigma q_i y_i^{izq}. \tag{5.26}$$

La posición crítica de la carga, en este caso, se determina con que *la suma de los productos de las ordenadas de la línea de influencia por debajo de los extremos izquierdos de los trozos aislados de la carga, por la intensidad de la misma, es igual a la suma de*

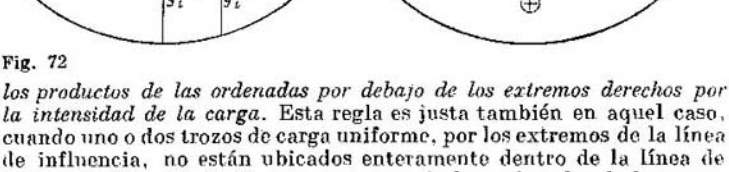


Fig. 72

los productos de las ordenadas por debajo de los extremos derechos por la intensidad de la carga. Esta regla es justa también en aquel caso, cuando uno o dos trozos de carga uniforme, por los extremos de la línea de influencia, no están ubicados enteramente dentro de la línea de influencia (fig. 72, *b*). En este caso, una de las ordenadas de la carga, que no cabe en la línea de influencia, deberemos tomarla igual a cero.

§ 40. NOCION SOBRE CARGA EQUIVALENTE. Se llama carga equivalente, para la línea de influencia dada, a tal carga uniforme distribuida por toda su longitud, que nos da el mismo valor de cálculo $S_{cál}$ que la carga sustituida:

$$S_{cál} = q_{eq}\omega. \tag{5.27}$$

donde ω es la superficie de la línea de influencia.

De la expresión (5.27) se desprende que

$$q_{eq} = \frac{S_{cál}}{\omega}. \tag{5.28}$$

Por esta fórmula se determina la carga equivalente que sustituye a la dada.

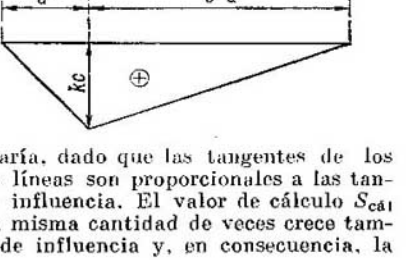
Para la determinación de $S_{cál}$, debida a la carga sustituida, se emplean las reglas expuestas más arriba.

A primera vista parece que estamos en un círculo vicioso. La carga equivalente nos es necesaria para la determinación de $S_{cál}$, pero, ella misma se determina con ayuda de esta última magnitud. Sin embargo, esto no es así, por cuanto para las líneas de influencia proporcionales la carga equivalente es igual. Se llaman líneas de influencia *proporcionales* a aquellas en que, para longitudes iguales, las relaciones de las ordenadas correspondientes son constantes (fig. 73). Demostremos que para ellas es igual la carga equivalente. Supongamos que por la primera línea de influencia la carga ha sido colocada en la posición de cálculo y que se ha determinado la magnitud $S_{cál}$. La carga equivalente es:

$$q_{eq} = \frac{S_{cál}}{\omega} = \frac{S_{cál}}{\frac{lc}{2}}.$$

Para la segunda línea de influencia, el estacionamiento de la carga

Fig. 73



en la posición de cálculo no varía, dado que las tangentes de los ángulos de inclinación de sus líneas son proporcionales a las tangentes de la primera línea de influencia. El valor de cálculo $S_{cál}$ aumenta en k veces. Pero en la misma cantidad de veces crece también la superficie de la línea de influencia y, en consecuencia, la carga equivalente no varía.

De esta manera, para todas las líneas de influencia proporcionales es menester doterminar una sola vez la carga equivalente, para poder emplearla en las restantes. Las cargas equivalentes permiten determinar la magnitud de cálculo, al multiplicarla por la superficie de la línea de influencia. Las cargas equivalentes, para las cargas rodantes y las líneas de influencia tipo, se presentan en tablas y gráficos, el empleo de los cuales no presenta dificultades. No obstante, no conviene olvidar que la carga equivalente se puede utilizar sólo para las líneas de influencia proporcionales.

§ 41. MATRICES DE INFLUENCIA. Supongamos que sobre el sistema actúan las fuerzas P_1, P_2, . . . , P_n (fig. 74, *a*) y, en los sitios de aplicación de las fuerzas, cuando es empleable el principio de independencia de acción de las mismas, se exige encontrar los

valores de cierta magnitud (del momento flector, de la fuerza axil o transversal, de los desplazamientos, etc.).

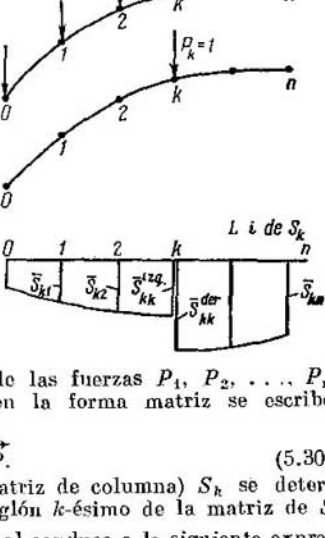
Para este fin puede servir la matriz de influencia, que transforma el vector de las fuerzas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en el vector de los valores de la magnitud S para la cual está compuesta, con el aspecto:

$$S = \begin{Vmatrix} \overline{S}_{11}\overline{S}_{12} \ldots \overline{S}_{1i} \ldots \overline{S}_{1n} \\ \overline{S}_{21}\overline{S}_{22} \ldots \overline{S}_{2i} \ldots \overline{S}_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{S}_{k1}\overline{S}_{k2} \ldots \overline{S}_{ki} \ldots \overline{S}_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{S}_{n1}\overline{S}_{n2} \ldots \overline{S}_{ni} \ldots \overline{S}_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{5.29}$$

donde S_{ik} es el valor de la magnitud S en el lugar determinado por el signo i ($i = 1, 2, \ldots, n$), debido a la fuerza unitaria P_k, aplicada en el sitio de acción de esta fuerza, determinado por el signo k ($k = 1, 2, \ldots, n$) (fig. 74, *b*).

Cualquier i-ésima columna de la matriz puede ser obtenida (para las fuerzas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de direcciones cualesquiera) como valores de S, debidos a la fuerza unitaria P_i, aplicada en el lugar de su acción, determinado con el signo i.

Fig. 74



Cualquier k-ésimo renglón de la matriz puede ser obtenido (para las fuerzas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de direcciones cualesquiera) por medio de la línea de influencia de la magnitud, en el sitio determinado con el signo k, construida por la fuerza $P = 1$, paralela a las fuerzas dadas.

La transformación del vector de las fuerzas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en el vector de la magnitud S, en la forma matriz se escribe así:

$$\vec{S} = \overrightarrow{SP}. \tag{5.30}$$

El elemento del vector (de la matriz de columna) S_k se determina por la multiplicación del renglón k-ésimo de la matriz de S por el vector de las fuerzas $\vec{P}$, lo cual conduce a la siguiente expre-

sión:

$$S_k = \overline{S}_{k1}P_1 + \overline{S}_{k2}P_2 + \ldots + S_{kn}P_n. \qquad (5.31)$$

Si la magnitud S sufre fractura bajo la acción de una fuerza concentrada, como, por ejemplo, bajo una fuerza transversal o axil, entonces, con iguales signos, el elemento matriz $\overline{S}_{ii}$ tendrá dos valores para S: uno, el $\overline{S}_{ii}^{izq}$ «a la izquierda» de la fuerza $P_i = 1$, y el otro, el $\overline{S}_{ii}^{der}$ «a la derecha», esto es,

$$\overline{S}_{ii} = \overline{S}_{ii}^{izq}/\overline{S}_{ii}^{der}. \qquad (5.32)$$

En este caso es necesario tener en cuenta que, si $\overline{S}_{ii}$ se determina por la línea de influencia de S_i, entonces, en el numerador de (5.32) la ordenada de la línea de influencia de S_i deberá ser escrita a la derecha de la sección y, en el denominador, a la izquierda.

CAPITULO VI * CALCULO DE VIGAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS Y DE PORTICOS PLANOS

§ 42. TIPOS DE VIGAS. Las vigas estáticamente determinadas se dividen en: *simplemente apoyadas*, aquellas cuyos extremos descansan en dos apoyos (fig. 75, *a*); *cantilever*, vigas sobre dos apoyos

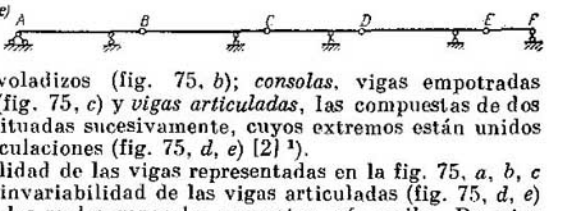


Fig. 75

con extremos voladizos (fig. 75, *b*); *consolas*, vigas empotradas en un extremo (fig. 75, *c*) y *vigas articuladas*, las compuestas de dos o varias vigas situadas sucesivamente, cuyos extremos están unidos entre sí por articulaciones (fig. 75, *d*, *e*) [2] [1]).

La invariabilidad de las vigas representadas en la fig. 75, *a*, *b*, *c* es evidente. La invariabilidad de las vigas articuladas (fig. 75, *d*, *e*) se establece por las reglas generales expuestas más arriba. De estas reglas, por ejemplo, se deduce que, dentro de un tramo no debe haber más de dos articulaciones en línea recta. La condición analítica de

[1]) A veces, las vigas se dividen en: simplemente apoyadas, esto es, con dos apoyos en los extremos (fig. 75, *a*); cantilever (fig. 75, *b*); consolas (fig. 75, *c*) y complejas, compuestas por las simplemente apoyadas, unidas sucesivamente entre sí por los extremos (fig. 75, *d*, *e*).

invariabilidad y determinación estática (indispensable, pero no suficiente) en este caso, será:

$$V_{ap} - 3 = A, \tag{6.1}$$

donde: V_{ap} es la cantidad de vínculos de apoyo;

A, la cantidad de articulaciones entre las partes de la viga.

En las vigas articuladas, los extremos de unas son apoyos para las otras. Estas vigas representan las partes fundamentales, y las otras, que se apoyan sobre éstas, las complementarias. Así, por ejemplo, la viga AB (fig. 75, *d*) es fundamental con respecto a la BC; la CD es fundamental con respecto a las BC y DE y la EF, es fundamental con respecto a la DE; las vigas BC y DE son complementarias. Análogamente, la viga AB (fig. 75, *e*) es fundamental con respecto a las BC, CD, DE y EF; la BC, por su parte, es fundamental con respecto a las CD, DE y EF, etc. Sólo una viga, la AB, es parte fundamental para todas, y sólo otra, la EF, es parte complementaria, en relación a las restantes. Las otras vigas BC, CD y DE cumplen un doble papel: con respecto a unas son partes fundamentales y, con respecto a otras, complementarias.

La división de las vigas en fundamentales y complementarias tiene sentido para la ejecución del cálculo de las vigas articuladas, el que, frecuentemente, es cómodo efectuarlo en orden inverso al de la formación (erección) del sistema. Además, ella permite imaginarse en forma más representativa el trabajo global del sistema, teniendo en cuenta que la carga, ubicada sobre las vigas fundamentales, no originará fuerzas internas en las vigas complementarias, la carga, situada sobre estas últimas, origina fuerzas internas en todas las vigas que, con respecto a ella, son fundamentales. Por fin, excluyendo de la viga articulada sólo la viga complementaria, el sistema queda invariante, mientras que excluyendo la viga fundamental, se transforma en variante.

§ 43. METODO ESTATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO, DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y DE LAS FUERZAS TRANSVERSALES EN LAS VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS Y CANTILEVER

1. LINEA DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES EN LOS APOYOS

Para generalizar, examinemos una viga sobre dos apoyos con voladizos (fig. 76). Determinemos sobre ella la posición del peso móvil $P = 1$ con la ordenada z, que tiene su origen en el apoyo izquierdo. Determinemos en la forma general las reacciones A y B:

$$\sum M_B = Al - 1\,(l - z) = 0,$$

de donde

$$A = \frac{l - z}{l}\,; \tag{6.2}$$

$$\sum M_A = -Bl + 1z = 0,$$

por lo cual

$$B = \frac{z}{l}. \qquad (6.3)$$

Las ecuaciones obtenidas son las de las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos A y B. Estas son lineales y correctas, si se cumplen las desigualdades $c_1 \leqslant z \leqslant l + c_2$. Las rectas que representan a las líneas de influencia pueden ser trazadas por dos puntos *cualesquiera*, por ejemplo:

cuando $z = 0$ $\quad A = 1$ y $B = 0$;

» $\quad z = l \quad A = 0$ y $B = 1$.

Por estos datos fueron construidas las líneas de influencia de las reacciones de los apoyos A y B. Estas fueron prolongadas en ambos lados hasta los extremos de los voladizos, como esto se desprende de las desigualdades expuestas.

2. LINEA DE INFLUENCIA DE M Y Q EN LA SECCION DADA

En la viga voladiza las secciones o cortes pueden ser de dos tipos (fig. 76):

a) secciones entre apoyos (sección *1—1*), a las cuales, en adelante, vamos a llamar *secciones intermedias*;

b) secciones en los voladizos (sección *2—2*), a las cuales llamaremos *secciones de voladizo*.

En estas secciones, los procedimientos de construcción de las líneas de influencia de las fuerzas internas son diferentes. Las fuerzas internas dependen del lugar donde se encuentra el peso $P = 1$, a la derecha o a la izquierda de la sección. Por eso es imprescindible examinar dos posiciones del peso, una a la derecha y la otra a la izquierda del corte.

Sección intermedia (1—1)

1. El peso se halla a la derecha de la sección: $a \leqslant z \leqslant l + c_2$. En este caso, con las fuerzas izquierdas expresamos las fuerzas internas:

$$M_1 = Aa = \frac{l-z}{l}a; \quad Q_1 = A = \frac{l-z}{l}.$$

Hemos obtenido las ecuaciones de las rectas, a las cuales, en correspondencia con la ubicación del peso, llamaremos *rectas derechas*. Las trazamos por medio de dos puntos que, por comodidad, los elegimos en los apoyos:

$z = 0$; $\quad M_1 = a$ y $Q_1 = 1$;

$z = l$; $\quad M_1 = 0$ y $Q_1 = 0$.

Las rectas están trazadas en la fig. 76. A las líneas de influencia, determinadas por estas rectas derechas, sólo las sombreamos dentro de los límites de sus partes útiles, esto es, $a \leqslant z \leqslant l + c_2$.

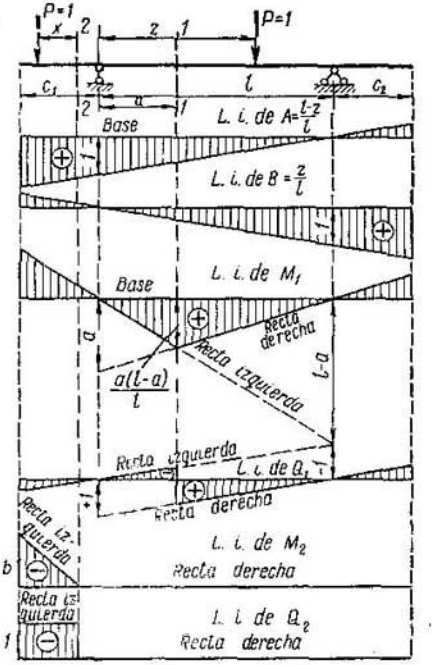


Fig. 76

2. El peso se halla a la izquierda de la sección: $-c_1 \leqslant z \leqslant a$. En este caso, con las fuerzas derechas expresamos las fuerzas internas:

$$M_1 = B(l-a) = \frac{z}{l}(l-a); \qquad Q_1 = -B = -\frac{z}{l}.$$

Estas son las ecuaciones de las *rectas izquierdas*. Trazamos estas últimas empleando los mismos dos puntos:

$$z = 0; \qquad M_1 = 0 \quad \text{y} \quad Q_1 = 0;$$
$$z = l; \qquad M_1 = l - a$$
$$\text{y} \quad Q_1 = -1.$$

Las rectas están trazadas en la fig. 76.

Es fácil demostrar que en la l.i. de M las rectas izquierda y derecha se intersecan por debajo de la sección y que, en la l.i. de Q, son paralelas. A las líneas de influencia, determinadas por las rectas izquierdas, las sombreamos, de igual manera, dentro de los límites de sus partes útiles, es decir, siendo $-c_1 \leqslant z \leqslant a$. Las líneas de influencia de M_1 y Q_1, en la sección intermedia, han sido construidas.

Señalemos una particularidad al construir la l.i. de M. Para construir la *recta derecha* es indispensable marcar, por debajo del apoyo izquierdo, la distancia a desde el apoyo izquierdo hasta la sección y, a través de este punto y el de la base, por debajo del apoyo derecho, trazar la recta a; para construir la recta izquierda es indispensable marcar, por debajo del apoyo derecho, la distancia $l - a$ desde el apoyo derecho hasta la sección y, a través de este punto y el de la base, por debajo del apoyo izquierdo, trazar la recta.

Las líneas de influencia de M_1 y Q_1 muestran que las fuerzas internas en las secciones intermedias surgen en cualquier posición del peso $P = 1$ sobre la viga, a exclusión de los puntos debajo de los apoyos.

Para una viga simplemente apoyada, las líneas de influencia se sitúan únicamente dentro de los límites del tramo.

Sección de voladizo (2—2)

Se recomienda determinar la posición del peso con la coordenada x, contada desde la sección dada (fig. 76) e, independientemente de

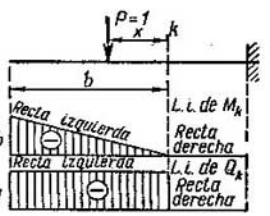


Fig. 77

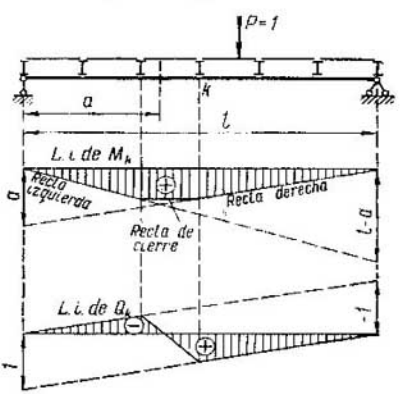


Fig. 78

la posición del mismo, a la izquierda o a la derecha del corte, *las fuerzas internas se determinan de la condición del equilibrio del voladizo seccionado.*

1. El peso se halla a la derecha de la sección ($x < 0$):

$$M_2 = 0; \qquad Q_2 = 0.$$

Las *rectas derechas* de las líneas de influencia de M_2 y Q_2, para las secciones sobre el *voladizo izquierdo*, coinciden con la base. Para las secciones sobre el *voladizo derecho*, al revés, son las *rectas izquierdas* las que coinciden con la base.

2. El peso se halla a la izquierda de la sección:

$$M_2 = -1x; \qquad Q_2 = -1.$$

Construimos las rectas izquierdas (fig. 76):

$$x = 0; \quad M_2 = 0 \quad \text{y} \quad Q_2 = -1;$$
$$x = b; \quad M_2 = -b \quad \text{y} \quad Q_2 = -1.$$

También en este caso, en la línea de influencia de M_2, las rectas derecha e izquierda se intersecan por debajo de la sección y, en la línea de influencia de Q_2, son paralelas.

La construcción de las líneas de influencia en las consolas (fig. 77) se efectúa análogamente a la construcción de las líneas de influencia de M_2 y Q_2 en las secciones de voladizo. Si tiene lugar la transmisión de la presión nodal (fig. 78), entonces, las líneas de influencia de M y Q se construyen sin tomarla en consideración, al principio, pero luego, sobre las rectas derechas se lleva el primer nudo de la derecha de la sección y, sobre las izquierdas, el primero de la izquierda de la misma. Los puntos obtenidos sobre las rectas derecha e izquierda de la línea de influencia se unen con una recta, llamada *de unión* (de transmisión).

§ 44. METODO CINEMATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO, DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y DE LAS FUERZAS TRANSVERSALES EN VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS Y VOLADIZAS

1. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO

Durante la construcción de las líneas de influencia de la reacción de apoyo izquierda A, es necesario sustituir este apoyo por la acción de la fuerza buscada A (fig. 79, *a*), luego, al sistema variante obtenido comunicarle un posible desplazamiento y emplear la expresión general de la línea de influencia por el método cinemático (5.7)

$$\text{l.i. de } A = -\frac{\Delta_p}{\Delta_A}.$$

El desplazamiento Δ_A es negativo, lo cual significa, que el signo de la línea de influencia coincide con el del diagrama de traslaciones Δ_p. La escala de la línea de influencia se determina por la expresión $\Delta_A = 1$. Análogamente se construye la línea de influencia de la reacción de apoyo B.

2. LINEAS DE INFLUENCIA DE M Y Q EN LA SECCION

Al construir la línea de influencia del momento flector M en la sección dada k, es indispensable excluir de ella el vínculo que impide el giro recíproco de las partes izquierda y derecha de la viga. Dado que en la viga de alma llena, la unión de dos de sus partes puede ser considerada convencionalmente como una soldadura, la sustitución de la misma por una articulación excluirá el vínculo que impide

la rotación recíproca de estas partes (fig. 79, *b*). La introducción de la articulación es compensada con los momentos incógnitos M_k. Damos un posible desplazamiento al sistema variante (la posición desplazada es la indicada con línea fina). Por la expresión general (5.7), obtenemos que

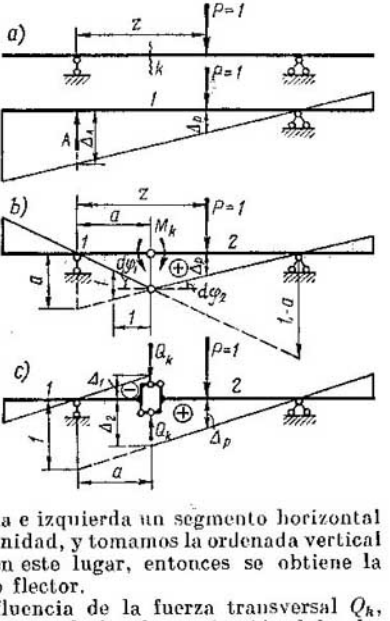


Fig. 79

$$\text{l.i. de } M_k = -\frac{\Delta_P}{\Delta_{3t}}.$$

Dado que

$$\Delta_M = -(d\varphi_1 + d\varphi_2),$$

la escala de la línea de influencia se determina por la expresión $d\varphi_1 + d\varphi_2 = 1$ o, en virtud de la pequeñez de los ángulos, con $\text{tg}\, d\varphi_1 + \text{tg}\, d\varphi_2 = 1$.

Por consiguiente, si en el diagrama de desplazamientos trazamos desde el punto de intersección de las rectas derecha e izquierda un segmento horizontal hacia cualquier lado, igual a la unidad, y tomamos la ordenada vertical entre las rectas como unidad en este lugar, entonces se obtiene la línea de influencia del momento flector.

Al construir la línea de influencia de la fuerza transversal Q_k, es indispensable excluir de la sección el vínculo que impide el desplazamiento recíproco de las partes en la dirección de las fuerzas transversales. Esto se logra sustituyendo la soldadura por dos barras de longitud infinitesimal, *paralelas al eje de la viga* (fig. 79, *c*). Con tal unión, el centro recíproco instantáneo de rotación de las partes izquierda y derecha de la viga estará situado sobre este eje, en el infinito. Esto significa que, con un posible desplazamiento, ambas partes de la viga permanecerán paralelas. Después de estas aclaraciones, al sistema transformado le comunicamos un desplazamiento infinitesimal (la posición desplazada se muestra con línea fina) y por la expresión general (5.7) escribimos la ecuación de la línea de influencia

$$\text{l.i. de } Q_k = -\frac{\Delta_P}{\Delta_Q}.$$

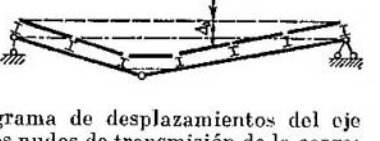
Dado que $\Delta_Q = -(\Delta_1 + \Delta_2)$, entonces, el signo de la línea de influencia coincide con el diagrama de traslaciones Δ_P y la escala

de la línea de influencia se determina por la expresión

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 1.$$

Análogamente se construyen las líneas de influencia de las fuerzas internas en las secciones voladizas. Si se tiene transmisión nodal de la carga, entonces, dentro del desplazamiento dado es necesario construir el diagrama de traslaciones de la línea de carga.

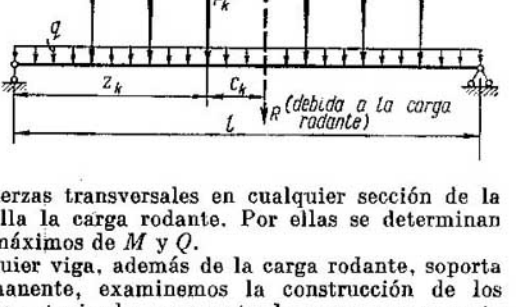
Fig. 80



Previamente se construye el diagrama de desplazamientos del eje de la viga, sobre el que se llevan los nudos de transmisión de la carga; luego, entre estos puntos se trazan segmentos rectos (fig. 80).

§ 45. DIAGRAMAS ENVOLVENTES DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y DE LAS FUERZAS TRANSVERSALES EN UNA VIGA SIMPLEMENTE APOYADA, DEBIDOS A UNA CARGA RODANTE. Se llaman diagramas *envolventes* (de cálculo) a aquellos en que las ordenadas son los valores más altos de los momentos

Fig. 81



flectores y de las fuerzas transversales en cualquier sección de la viga, al pasar por ella la carga rodante. Por ellas se determinan también los valores máximos de M y Q.

Por cuanto cualquier viga, además de la carga rodante, soporta también carga permanente, examinemos la construcción de los diagramas envolventes, teniendo en cuenta la carga permanente uniforme q (fig. 81).

1. DIAGRAMA ENVOLVENTE DE LOS MOMENTOS FLECTORES

Examinemos los momentos en la sección de una viga bajo el peso P_k, cuando por ella se desplaza una carga (fig. 81). La distancia desde el apoyo izquierdo hasta el peso P_k la designamos con z_k y su distancia c_k hasta la resultante R, a la izquierda, la consideremos

positiva, y a la derecha, negativa. Con una posición casual de la carga las reacciones de apoyo serán:

$$A = \frac{R(l-c_k-z_k)}{l} + \frac{ql}{2}; \quad B = \frac{R(z_k+c_k)}{l} + \frac{ql}{2} \tag{6.4}$$

y el momento bajo la carga P_k

$$M_k = \frac{R}{l}(l-c_k-z_k)\,z_k + \frac{qz_k(l-z_k)}{2} + M_k^{izq}, \tag{6.5}$$

donde

$$M_k^{izq} = -\sum P_i^{izq}(c_i-c_k) \qquad c_i > c_k. \tag{6.6}$$

La ecuación (6.5) es justa, si

$$c_1 - c_k \leqslant z_k \leqslant l + c_n - c_k. \tag{6.7}$$ [1]

Esta es la ecuación de la parábola, que puede ser fácilmente construida. El diagrama envolvente está compuesto de trozos de parábolas incidentes (fig. 82, *a*). Al construir la envolvente no es necesario calcular, por la ecuación (6.5), aquellas ordenadas de la parábola cortada que, evidentemente, serán menores que las ordenadas de la parábola cortante. Hallemos, en la forma general, la abscisa de incidencia z_k^* de las parábolas vecinas del diagrama envolvente de los momentos, bajo las cargas P_k y P_{k+1}, a la derecha del cual, el diagrama envolvente está determinado por la parábola bajo la carga P_{k+1} y, a la izquierda, por la parábola bajo la carga P_k. Para ello, de acuerdo con (6.5), anotemos los momentos bajo los pesos P_k y P_{k+1} para $z = z_k^*$, e igualémoslos uno al otro:

$$\frac{R}{l}(l-c_k-z_k^*)\,z_k^* + \frac{qz_k^*(l-z_k^*)}{2} - \sum P_i^{izq}(c_i-c_k) =$$

$$= \frac{R}{l}(l-c_{k+1}-z_k^*)\,z_k^* + \frac{qz_k^*(l-z_k^*)}{2} -$$

$$- \sum P_i^{izq}(c_i-c) - \left(\sum P_i^{izq} + P_k\right)(c_k - c_{k+1}).$$

Aquí se emplea la conocida dependencia: $M_{z+\Delta} = M_z + R^{izq}\Delta$.

Después de simplificar obtenemos que

$$\frac{R}{l}z_k^* - \left(\sum P_i^{izq} + P_k\right) = 0,$$

de donde

$$z_k^* = \frac{\sum P_i^{izq} + P_k}{R}\,l. \tag{6.8}$$

De este modo, la parábola bajo la carga P_k entra en la composición de la envolvente, cuando

$$z_{k-1}^* \leqslant z_k \leqslant z_k^*.$$

[1] Delante de c_n tenemos el signo más, dado que $c_n < 0$.

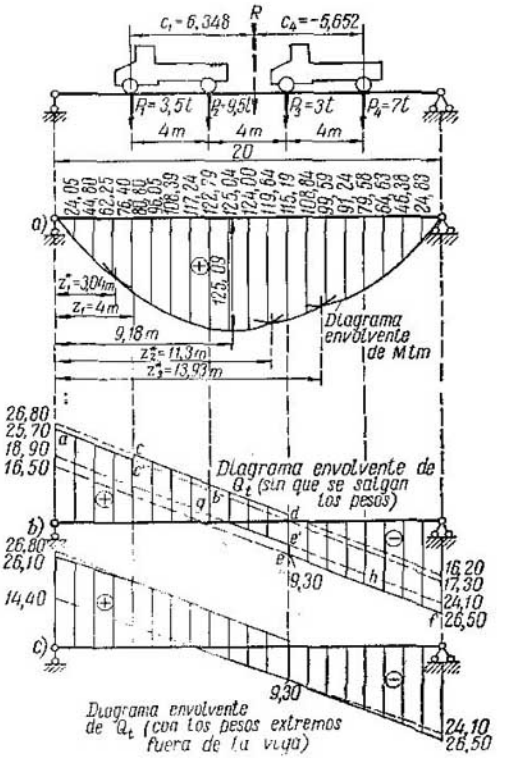


Fig. 82

No obstante, es necesario tener en cuenta, que en el diagrama envolvente, cuando $z < c_1 - c_2$, la parábola no puede comenzar bajo el segundo peso y terminar bajo el primero, dado que, de lo contrario, el peso P_1 saldría fuera de la viga y la ecuación de la parábola bajo el peso P_2 sería distinta. Esto mismo se puede decir referente a las parábolas bajo los pesos último y penúltimo. La parábola, bajo el último peso P_n, no se puede comenzar y la que está bajo el penúltimo no puede prolongarse, cuando $z > l + c_n - c_{n-1}$, ya que, de otro modo, el último peso P_n saldría fuera de la viga.

Hallemos ahora el mayor momento flector *bajo el peso* P_k.

Compongamos la derivada de M_k e igualémosla a cero:

$$\frac{dM_k}{dz_k} = \frac{R}{l}(l - c_k - 2z_k) + \frac{q}{2}(l - 2z_k) = 0,$$

de donde obtenemos que

$$z_k = \left[\frac{R}{l}(l-c_k)+\frac{ql}{2}\right] : \left(\frac{2R}{l}+q\right). \qquad (6.9)$$

La solución será correcta, si z_k satisface a la condición (6.7). Colocando (6.9) en la expresión (6.5), obtenemos

$$M_{k,\,\text{máx}} = \frac{\left[\frac{R}{l}(l-c_k)+\frac{ql}{2}\right]^2}{4\frac{R}{l}+2q} + M_k^{\text{izq}}. \qquad (6.10)$$

Utilicemos todos los razonamientos expuestos para la viga representada en la fig. 82, donde $R=23$ tf, $q=1$ tf/m, $c_1=6{,}348$ m, $c_2=2{,}348$ m, $c_3=-1{,}652$ m, $c_4=-5{,}652$ m. Por la fórmula (6.8) hallamos que:

$$z_0^* = 0, \qquad z_1^* = \frac{P_1 l}{R} = 3{,}04 \text{ m},$$

$$z_2^* = \frac{(P_1+P_2)\,l}{R} = 11{,}3 \text{ m}, \quad z_3^* = \frac{(P_1+P_2+P_3)\,l}{R} = 13{,}93 \text{ m}$$

y

$$z_4^* = \frac{(P_1+P_2+P_3+P_4)\,l}{R} = 20 \text{ m}.$$

El momento debajo del primer peso, por la ecuación (6.5), es:

$$M_1 = \frac{23}{20}(20-6{,}348-z_1)\,z_1 + \frac{1z_1(20-z_1)}{2},$$

cuando $0 \leqslant z_1 \leqslant 4$ m;
el momento por debajo del segundo peso es:

$$M_2 = \frac{23}{20}(20-2{,}348-z_2)\,z_2 + \frac{1z_2(20-z_2)}{2} - 3{,}5\cdot 4,$$

cuando $4 \text{ m} \leqslant z_2 \leqslant 11{,}3$ m;
el momento por debajo del tercer peso es:

$$M_3 = \frac{23}{20}(20+1{,}652-z_3)\,z_3 + \frac{1z_3(20-z_3)}{2} - 3{,}5\cdot 8 - 9{,}5\cdot 4,$$

cuando $11{,}3 \text{ m} \leqslant z_3 \leqslant 13{,}93$ m,
y el momento por debajo del cuarto peso es:

$$M_4 = \frac{23}{20}(20+5{,}652-z_4)\,z_4 + \frac{1z_4(20-z_4)}{2} - 3{,}5\cdot 12 - 9{,}5\cdot 8 - 3\cdot 4,$$

cuando $13{,}93 \text{ m} \leqslant z_3 \leqslant 20$ m.

Por estas ecuaciones se construyó el diagrama envolvente de los momentos flectores (fig. 82, *a*). Por él se ve, que el momento más grande estará debajo del segundo peso. Encontremos su valor por

la expresión (6.10):

$$M_{2,\,máx} = \left[\frac{23}{20}(20 - 2{,}348) + \frac{1 \cdot 20}{2}\right]^2 : \left(4\,\frac{23}{20} + 2 \cdot 1\right) - \\ - 3{,}5 \cdot 4 = 125{,}09 \text{ tf/m}.$$

La distancia desde el apoyo izquierdo hasta el momento mayor, por (6.9), es:

$$z_2 = \left[\frac{23}{20}(20 - 2{,}348) + \frac{1 \cdot 20}{2}\right] : \left(2\,\frac{23}{20} + 1\right) = 9{,}18 \text{ m}.$$

Si la carga rodante puede ser ubicada sobre la viga en un orden inverso, entonces, para las secciones simétricas, es necesario tomar por momento de cálculo el mayor de ellos en el diagrama envolvente.

En aquellos casos en que el diagrama envolvente de los momentos flectores por sí mismo no presenta interés, y se exige únicamente conocer el mayor momento flector, entonces, éste puede ser obtenido mediante la confrontación de los momentos $M_{k,\,máx}$, calculados bajo diferentes pesos por la expresión (6.10), lo cual, por lo visto, es la vía más simple y segura. Pero, en este caso, es necesario tener en cuenta que, frecuentemente, el momento mayor puede no estar debajo de todos los pesos. Así, por ejemplo, si en la posición de la carga, a la que se debe el $M_{k,\,máx}$, debajo del peso P_k, el diagrama de las fuerzas transversales no pasa por cero, entonces, esto significa que el mayor momento flector de todos, en tal posición de la carga, estará en algún otro lugar de la viga. Por consiguiente, tampoco puede estar debajo de este peso. De este modo, $M_{k,\,máx}$ *debe ser confrontado no para todos los valores de* c_k, *no debajo de cada carga, sino solamente debajo de aquellas bajo las cuales, siendo la posición de la carga conforme a* (6.9), *el diagrama de Q pasa por cero*. En este caso, habrá la certeza de que, para tal ubicación de la carga, los momentos en otras secciones serán menores. Pero esto, aún no significa que ha sido hallado el mayor momento flector.

Este será hallado de la confrontación de $M_{k,\,máx}$ bajo aquellos pesos, debajo de los cuales éste es posible. Por eso, al principio del cálculo, es importante destacar las secciones y los pesos bajo los cuales no conviene buscar el mayor momento flector, dado que entre ellos no puede estar. La condición del paso de la fuerza transversal por cero servirá de criterio.

Para revelar aproximadamente aquellos pesos debajo de los cuales no puede existir el mayor máximo, examinemos una carga rodante en dos posiciones extremas (fig. 83) y hallaremos que

$$A_{mín} - R_{izq} - P_k - q\,(l + c_n - c_k) \gtrless 0;$$

$$A_{máx} - R_{izq} - P_k - q\,(c_1 - c_k) \gtrless 0,$$

donde R_{izq} es la resultante de las fuerzas situadas a la izquierda del peso P_k.

Puesto que

$$A_{\text{mín}} = -\frac{Rc_n}{l} + \frac{ql}{2}; \quad A_{\text{máx}} = \frac{R(l-c_1)}{l} + \frac{ql}{2}, \text{ entonces,}$$

$$-\frac{Rc_n}{l} + \frac{ql}{2} - R_{\text{izq}} - P_k - q(l + c_n - c_k) \gtrless 0;$$

$$R\frac{(l-c_1)}{l} + \frac{ql}{2} - R_{\text{izq}} - P_k - q(c_1 - c_k) \gtrless 0.$$

y, por consiguiente,

$$c_k \gtrless \frac{l}{2} + c_n + \frac{Rc_n}{ql} + \frac{R_{\text{izq}} + P_k}{q}; \tag{6.11}$$

$$c_k \lessgtr -\frac{l}{2} + c_1 - \frac{R(l-c_1)}{ql} + \frac{R_{\text{izq}} + P_k}{q}. \tag{6.12}$$

El momento flector mayor de todos no se debe buscar ni más a la derecha ni más a la izquierda de las distancias límites, determinadas por la expresión (6.11), a la izquierda de la resultante R,

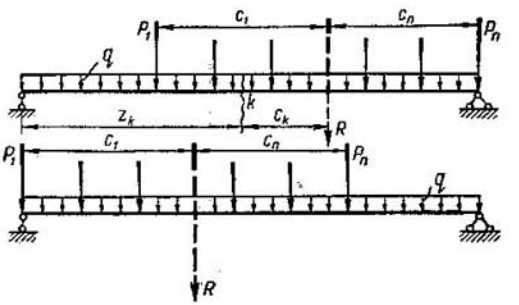


Fig. 83

y por la (6.12), a la derecha de ella. Es posible lograr indicaciones más exactas sobre debajo de cuales pesos es necesario buscar el mayor momento flector, de las consideraciones de que las secciones, determinadas por la magnitud z_k, deben satisfacer simultáneamente dos condiciones: la (6.9) y la de paso del diagrama de Q por cero en este sitio. Desarrollemos estas condiciones:

$$A - R_{\text{izq}} - qz_k \gtrless 0;$$

$$A - (R_{\text{izq}} + P_k) - qz_k \lessgtr 0.$$

Uniendo ambas desigualdades, obtenemos que

$$R_{\text{izq}} \lessgtr A - qz_k \lessgtr R_{\text{izq}} + P_k. \tag{6.13}$$

Colocando el valor de A de (6.4) y de z_k de (6.9) llevamos la expresión (6.13) a la forma

$$R_{\text{izq}} \lessgtr \frac{\frac{R}{l}(l-c_k)+\frac{ql}{2}}{2\left(1+\frac{ql}{2R}\right)} \lessgtr R_{\text{izq}}+P_k. \qquad (6.14)$$

Señalemos que esta misma expresión se puede obtener componiendo la derivada $\frac{dM_{k,\,\text{máx}}}{dc_k}$ de la expresión (6.10). Antes del máximo $\frac{dM_{k,\,\text{máx}}}{dc_k} \gtrless 0$ y después de él, $\frac{dM_{k,\,\text{máx}}}{dc_k} \lessgtr 0$. Además, antes del máximo $\frac{dM_k^{\text{izq}}}{dc_k} = \Sigma P_i^{\text{izq}} + P_k$ y después de él, $\frac{dM_k^{\text{izq}}}{dc_k} = \Sigma P_i^{\text{izq}}$, dado que la coordenada c_k se mide desde la resultante hacia la izquierda.

Por cuanto, en principio, es necesario emplear la fórmula (6.14) para cada peso, bajo el cual, sobre la base de (6.11) y (6.12), puede estar el mayor de todos los momentos flectores, y por complejidad, ésta es igual, aproximadamente, que la fórmula (6.10), entonces se puede recomendar, dejando de lado la (6.14), determinar directamente los momentos flectores por debajo de todos estos pesos y de ellos elegir el mayor.

Las expresiones obtenidas (6.11)—(6.14) son correctas también cuando la carga rodante es repartida $p = f(c_k)$. En este caso, es necesario colocar en ellas $P_k = 0$ y conservar el signo de igualdad. Así, por ejemplo, para una carga uniforme con una extensión $a \leqslant l$, por (6.14) tendremos que (fig. 84):

$$R = pa; \quad R_{\text{izq}} = p\left(\frac{a}{2} - c_k\right);$$

$$p\left(\frac{a}{2} - c_k\right) = \left[\frac{pa}{l}(l-c_k) + \frac{ql}{2}\right] : 2\left(1+\frac{ql}{2pa}\right)$$

ó

$$c_k\left(2p - p\frac{a}{l} + \frac{ql}{a}\right) = 0,$$

de donde obtenemos que $c_k = 0$. La respuesta es única. Prosiguiendo, por (6.9) tendremos que

$$z_k = \left(R+\frac{ql}{2}\right) : \left(\frac{2R}{l}+q\right) = \frac{l}{2}.$$

Por consiguiente, *si la carga rodante está ubicada sobre la viga simétricamente respecto a su centro*, (fig. 84), *el mayor momento flector, debido a la carga uniforme rodante p, con una extensión* $a \leqslant l$, *teniendo o sin tener en cuenta la carga permanente q, se encontrará siempre en el centro de la viga.*

Si la carga constante q es pequeña en comparación con la rodante y puede ser despreciada, entonces, $M_{k,\,\text{máx}}$ estará siempre debajo

del peso concentrado, lo cual se desprende de la configuración poligonal del diagrama de los momentos flectores para pesos concentrados. Suponiendo que $q = 0$ en todas las expresiones obtenidas más arriba, escribámoslas para el caso dado:

$$z_k = \frac{l - c_k}{2}; \tag{6.15}$$

$$M_k = \frac{R}{l}(l - c_k - z_k)\, z_k + M_k^{\text{izq}}; \tag{6.16}$$

$$M_{k,\,\text{máx}} = \frac{R}{4l}(l - c_k)^2 + M_k^{\text{izq}}; \tag{6.17}$$

$$-\frac{Rc_n}{l} \leqq R_{\text{izq}} + P_k; \tag{6.18}$$

$$\frac{R(l - c_1)}{l} \leqq R_{\text{izq}} + P_k; \tag{6.19}$$

$$R_{\text{izq}} \leqq \frac{R}{2l}(l - c_k) \leqq R_{\text{izq}} + P_k. \tag{6.20}$$

De (6.15) se desprende la simple regla de que el peso P_k, debajo del cual se determina $M_{k,\,\text{máx}}$, y la resultante R deberán estar ubicados hacia distintos lados del centro de la viga (fig. 85), a igual distancia $\frac{c_k}{2}$.

Las expresiones (6.4)—(6.20) son correctas mientras que todos los pesos que entran en la resultante se encuentran sobre la viga. Pero,

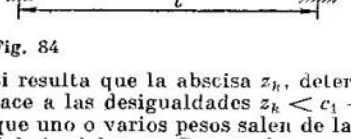


Fig. 84

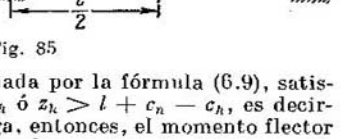


Fig. 85

si resulta que la abscisa z_k, determinada por la fórmula (6.9), satisface a las desigualdades $z_k < c_1 - c_k$ ó $z_k > l + c_n - c_k$, es decir que uno o varios pesos salen de la viga, entonces, el momento flector debajo del peso P_k, sin los pesos que han salido de la viga, será mayor que con ellos. Esto se desprende de los siguientes razonamientos simples. Supongamos que se examina no una viga simple, sino con voladizos, sobre los cuales no existe carga permanente. Evidentemente, todos los razonamientos hechos arriba no cambian, pero a causa de los voladizos, la longitud de los cuales se puede suponer de cualquier valor, los límites (6.7) serán otros. Todos los pesos fuera de la viga ahora se ubicarán sobre sus voladizos. Entonces, el $M_{k,\,\text{máx}}$, calculado por (6.10) debajo de este peso será, efectivamente, el mayor momento flector de todos los momentos flectores positivos debajo del mismo, pero menor que el debido a aquella parte de la carga que está ubicada sobre la zona intermedia de la

viga (entre los apoyos), dado que, para esta parte de la viga, los pesos situados sobre los voladizos han de dar momentos flectores negativos.

Demostremos, además, que, si para z, calculado por (6.9), el mayor momento flector $M_{k,\ máx}$ se encuentra bajo el peso P_k, y uno de los pesos extremos, por ejemplo, el primero, resulta sobre el apoyo, entonces, el momento bajo el peso P_k, sin el primer peso, será mayor que el momento $M_{k,\ máx}$ calculado anteriormente. Para esto es suficiente demostrar, que para la nueva resultante $R_1 = R - P_1$, el nuevo valor de z'_k, por (6.9), será menor que el precedente z_k con la vieja resultante R. Por consiguiente, para la nueva resultante, el momento máximo debajo del peso P_k aún no se ha alcanzado. Es necesario desplazar la carga hacia la izquierda. La distancia desde la nueva resultante hasta el peso P_k es

$$c'_k = c_k + \frac{P_1 c_1}{R - P_1}.$$

Ahora, por (6.9)

$$\Delta z_k = z_k - z'_k = \left[\frac{R}{l}(l - c_k) + \frac{ql}{2}\right] : \left(\frac{2R}{l} + q\right) -$$

$$- \left[\frac{R - P_1}{l}\left(l - c_k - \frac{P_1 c_1}{R - P_1}\right) + \frac{ql}{2}\right] : \left[\frac{2(R - P_1)}{l} + q\right] > 0.$$

Después de transformada queda $\frac{2RP_1c_1}{l^2} + \frac{qP_1(c_1 - c_k)}{l} > 0$. De esta manera, para z_k, debajo del peso P_k aún no se alcanzó el momento máximo; éste puede ser alcanzado para z'_k, o sea sin el peso P_1 sobre el apoyo. Análogamente se demuestra que, si para z_k por (6.9), el último peso resulta encima del apoyo izquierdo, entonces, el momento debajo de P_k, sin este peso, será mayor que con él.

Así que, si por (6.9) $z_k \leqslant c_1 - c_k$ ó $z_k \geqslant l + c_n - c_k$, entonces, es indispensable un recálculo, excluyendo del examen a los pesos desalojados de la

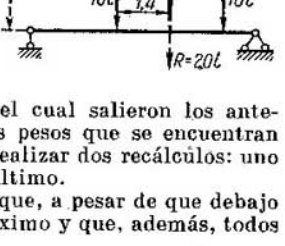


Fig. 86

viga y al colocado sobre el apoyo, por el cual salieron los anteriores. Si, simultáneamente, son dos los pesos que se encuentran sobre los apoyos, entonces, es necesario realizar dos recálculos: uno excluyendo al primer peso y el otro, al último.

Conviene, igualmente, tener en cuenta que, a pesar de que debajo de cierto peso P_k el momento flector es máximo y que, además, todos

los pesos permanecieron en la viga, es decir, que se cumplió la condición (6.8), con todo y con eso, debajo de este peso puede haber otro máximo de momento, que será mayor que el primero, cuando uno o una parte de los pesos salgan de la viga. Esto se puede establecer con cálculos comparativos. Tal caso ha sido examinado en la fig. 86. El momento flector debajo del segundo peso, habiendo tres pesos sobre la viga, es igual a 17 tm, pero habiendo dos, a 17,63 tm.

2. DIAGRAMA ENVOLVENTE DE LAS FUERZAS TRANSVERSALES

En correspondencia con los dos signos de las fuerzas transversales en la viga, con carga vertical dirigida hacia abajo, el diagrama envolvente de las fuerzas transversales será también de dos signos: $Q_{máx} > 0$ y $Q_{mín} < 0$. La mayor fuerza transversal positiva, como es fácil de suponer por la forma del diagrama de Q, para pesos concentrados, o por la forma de las líneas de influencia Q, puede estar a dz a la izquierda de cierto peso concentrado de una carga rodante (corrientemente, de uno de los pesos de la izquierda de la resultante y, frecuentemente, pero no siempre, del primero P_1), y la mayor fuerza transversal negativa, a dz a la derecha de algún otro peso concentrado (corrientemente de uno de los pesos de la derecha de la resultante y, frecuentemente, pero no siempre, del último P_n).

Escribamos, en la forma general, la expresión de la fuerza transversal situada a la distancia dz a la izquierda y a la derecha de cierto peso concentrado P_k

$$Q_k^{izq} = A - qz_k - \sum P_i^{izq} - \frac{R}{l}(l - c_k - z_k) + \\ + \frac{ql}{2} - qz_k - \sum P_i^{izq}; \qquad (6.21)$$

$$Q_k^{der} = Q_k^{izq} - P_k = -\frac{R}{l}(z_k + c_k) - \frac{ql}{2} + \\ + q(l - z_k) + \sum P_i^{der} \qquad (6.22)$$

para

$$c_1 - c_k \leqslant z_k \leqslant l + c_n - c_k.$$

Las ecuaciones (6.21) — (6.22) determinan rectas peralelas, fáciles de construir por dos puntos cualesquiera, por ejemplo, por los puntos bajo los apoyos de la viga, para $z_k = 0$ y $z_k = l$:

$$Q_{k,\,izq}^{0} = \frac{R}{l}(l - c_k) + \frac{ql}{2} - \sum P_i^{izq}; \qquad (6.23)$$

$$Q_{k,\,izq}^{l} = -\frac{R}{l}c_k - \frac{ql}{2} - \sum P_i^{izq}; \qquad (6.24)$$

$$Q_{k,\,der}^{0} = -\frac{R}{l}c_k + \frac{ql}{2} + \sum P_i^{der}; \qquad (6.25)$$

$$Q_{k,\,der}^{l} = -\frac{R}{l}(l + c_k) - \frac{ql}{2} + \sum P_i^{der}. \qquad (6.26)$$

Las partes útiles de estas rectas se determinan por (6.7). La tangente del ángulo de inclinación de estas rectas es

$$\operatorname{tg}\alpha = -\left(\frac{R}{l} + q\right). \tag{6.27}$$

La construcción de los diagramas envolventes de Q depende de si los pesos pueden o no salirse de la viga. Si no pueden, como en las vigas portagrúa, entonces, la envolvente de $Q_{\text{máx}}$ estará compuesta de segmentos de líneas paralelas y, precisamente, de aquellas que en el tramo dado dan la mayor fuerza transversal, y la envolvente de $Q_{\text{mín}}$, de segmentos de rectas paralelas, que dan el menor (en el sentido algebraico) valor de la fuerza transversal.

En calidad de ejemplo, en la fig. 82, *b*, fueron construidas las envolventes de $Q_{\text{máx}}$, representadas por la línea *ac'cd*, y las de $Q_{\text{mín}}$, representadas por la línea *ef*, sin considerar los pesos que salen de la viga.

Las ecuaciones de algunas rectas son las siguientes:

$$Q_1^{\text{izq}} = \frac{23}{20}(20 - 6{,}348 - z_1) + \frac{1\cdot 20}{2} - 1z_1,$$

si $0 \leqslant z_1 \leqslant 8$ m;

$$Q_2^{\text{izq}} = \frac{23}{20}(20 - 2{,}348 - z_2) + \frac{1\cdot 20}{2} - 1z_2 - 3{,}5,$$

para $4m \leqslant z_2 \leqslant 12$ m;

$$Q_4^{\text{der}} = -\frac{23}{20}(z_4 - 5{,}652) - \frac{1\cdot 20}{2} + 1\,(20 - z_4),$$

cuando $12\ \text{m} \leqslant z_4 \leqslant 20$ m;

$$Q_3^{\text{der}} = -\frac{23}{20}(z_3 - 1{,}652) - \frac{1\cdot 20}{2} + 1\,(20 - z_3) + 7,$$

para $8\ m \leqslant z_3 \leqslant 16$ m.

Si, como sucede en los puentes, los pesos pueden salirse de la viga, las envolventes de $Q_{\text{máx}}$ y $Q_{\text{mín}}$ representarán líneas continuas, compuestas por segmentos. Al construir las envolventes, al principio, es necesario destacar aquellos pesos determinativos de las rectas que cubren a todas las restantes por abajo y por arriba. Esto es fácil de hacer por el mayor valor de (6.23) y por el menor (en el sentido algebraico) de (6.26).

Demostremos, a continuación, una regla importante.

Si debajo de cualquier peso P_k, para todos los valores de $c_1 - c_k \leqslant z_k \leqslant l + c_n - c_k$, la ordenada de Q_k^{izq} es mayor que los restantes valores de $Q_{k+1}^{\text{izq}}, \ldots, Q_n^{\text{izq}}$ de la derecha, entonces, Q_k^{izq} también será mayor que ellos para $z_k > l + c_n - c_k$, es decir, cuando parte de los pesos derechos o todos ellos se ubican a la derecha del apoyo derecho.

Para la demostración, supongamos que la viga, a su derecha, tiene un voladizo, sobre el cual pueden disponerse los pesos de la

derecha. En este caso, para los valores de $c_1 - c_k \leqslant z_k \leqslant l$, la expresión (6.21) es correcta. Por consiguiente, habiendo voladizo, para $z_k = l$, Q_k^{izq} hasta el mismo apoyo derecho será mayor que las restantes fuerzas transversales de la izquierda. Para eliminar la acción de los pesos que salieron al voladizo imaginario es necesario aplicar a éste los mismos pesos que actúan desde abajo hacia arriba. Estos pesos darán una reacción positiva en el apoyo izquierdo de la viga y, por consiguiente, una fuerza transversal positiva, constante a todo lo largo del tramo. Con tal fuerza transversal, idéntica para todas las secciones, Q_k^{izq} no puede ser menor que las demás fuerzas transversales de la derecha, si antes de esto era mayor que ellas.

Análogamente podemos demostrar que, si para todos los valores de $c_1 - c_m \leqslant z_m \leqslant l + c_n - c_m$, Q_m^{der} es menor (en el sentido algebraico) que las restantes fuerzas transversales $Q_{m-1}^{der}, \ldots, Q_1^{der}$ de la izquierda, entonces, será también menor para $z_m \leqslant c_1 - c_m$, o sea, cuando una parte o todos los pesos de la izquierda se disponen a la izquierda del apoyo izquierdo.

Las tesis demostradas nos conducen a la siguiente regla: al construir la envolvente de $Q_{máx}$ no se debe examinar a Q debajo de los pesos a la derecha de la fuerza P_k y, al construir la envolvente de $Q_{mín}$, debajo de los pesos a la izquierda de la fuerza P_m.

Frecuentemente (pero no siempre), tales pesos serán el primero y el último. En tales casos es necesario construir $Q_{máx}$ como Q_1^{izq}, y a $Q_{mín}$ como Q_n^{der} en toda la extensión.

Si los pesos P_k y P_m son intermedios, entonces, al construir $Q_{máx}$, en el sector $z_k < c_1 - c_k$, es necesario tener en cuenta el desplazamiento gradual de los pesos izquierdos más allá del apoyo izquierdo y, al construir $Q_{mín}$, para $z_m > l + c_n - c_m$, el de los pesos derechos, más allá del apoyo derecho.

En la fig. 82, $Q_{mín}$ es Q_4^{der} y $Q_{máx}$ es Q_2^{izq}; al mismo tiempo, la construcción de la parte correspondiente del diagrama debe terminarse teniendo en cuenta la disposición del primer peso a la izquierda del apoyo izquierdo. En este caso, la nueva resultante es igual a 19,5 t, cuya distancia c_2 desde ella hasta el peso P_2 es igual a 3,487 m, y la ecuación (6.21) toma la forma

$$Q_2^{izq} = \frac{19,5}{20}(20 - 3,487 - z_2) + \frac{1 \cdot 20}{2} - 1z_2.$$

El diagrama envolvente de $Q_{máx}$ en la sección $0 \leqslant z_2 \leqslant 4$ m (véase la fig. 82, *c*), se construyó por esta ecuación. Si la carga rodante puede estar ubicada sobre la viga en el orden inverso, entonces, para la sección dada, como fuerza transversal de cálculo, tanto negativa, como positiva, es necesario tomar la mayor fuerza transversal en valor absoluto, en la sección dada y en su simétrica, tomada del diagrama envolvente.

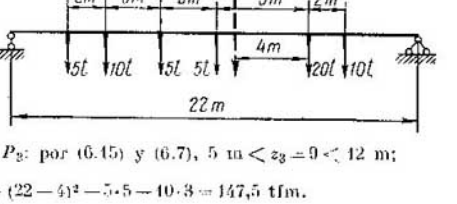
Ejemplo 8. Determinar el momento flector de cálculo para la viga (fig. 87). Hallemos por (6.18) y (6.19) los pesos de los extremos, a la derecha e izquierda de la resultante, entre los cuales puede estar el momento mayor.

Por (6.18): $\frac{55 \cdot 6}{22} < R_{izq} + P_k = 15 + 5$ (tercer peso).

Por (6.19): $\frac{56\,(22-9)}{22} < R_{izq} + P_k = 25 + 20$ (quinto peso).

Calculemos los momentos bajo todos los pesos P_3, P_4 y P_5 por (6.17).

Fig. 87



El momento bajo el peso P_3: por (6.15) y (6.7), $5 \text{ m} < z_3 = 9 < 12$ m;

$$M_{3,\,máx} = \frac{55}{4 \cdot 22}\,(22-4)^2 - 5 \cdot 5 - 10 \cdot 3 = 147{,}5 \text{ tfm}.$$

El momento bajo el peso P_4: $9 - 1 < z_4 = 10{,}5 < 22 - 6 - 1$;

$$M_{4,\,máx} = \frac{55}{4 \cdot 22}\,(22-1)^2 - 5 \cdot 8 - 10 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = 160{,}63 \text{ tfm}.$$

El momento bajo el peso P_5: $9 + 1 = \frac{22 + 4}{2} < 22 - 6 + 4$.

El primer peso resultó sobre el apoyo izquierdo. Es indispensable calcular $M_{5,\,máx}$ sin él. Ahora, la resultante $R = 50$ tf. Esta pasa a la distancia de 1,9 m del que fue cuarto peso (fig. 87),

$$c_1 = 7{,}9 \text{ m},\ c_5 = -3{,}1 \text{ m},\ c_n = -5{,}1 \text{ m};\ 7{,}9 + 3{,}1 <$$

$$< \frac{22 + 3{,}1}{2} < 22 - 5{,}1 + 3{,}1;\ M_{5,\,máx} =$$

$$= \frac{50}{4 \cdot 22}\,(22 + 3{,}1)^2 - 10 \cdot 11 - 5 \cdot 8 - 5 \cdot 5 = 182{,}96 \text{ tfm}.$$

Para todos los pesos sobre la viga, $M_{5,\,máx} = 182{,}5$ tfm.

§ 46. DIAGRAMAS ENVOLVENTES DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y FUERZAS TRANSVERSALES DEBIDAS A UNA CARGA RODANTE, EN UNA VIGA CON DOBLE VOLADIZO. Frecuentemente, en las vigas voladizas, para la parte entre los apoyos, los momentos flectores y las fuerzas transversales son de cálculo, que determinan fundamentalmente la sección de la viga. Por eso, para ser breves, nos limitaremos a examinar los diagramas envolventes sólo sobre la parte entre los apoyos de la viga. Vamos a considerar, que la longitud de la carga rodante, es decir, la distancia entre el primero y el último peso, es menor que la del tramo.

La particularidad de la viga voladiza, para una longitud a del voladizo, consiste, ante todo, en que entre los apoyos, el momento flector, debido a la carga constante, es menor que el de una viga simple de la misma luz en el valor $\Delta M = -\frac{qa^2}{2}$, al mismo tiempo

que en ambas vigas, para esa parte, las fuerzas transversales entre los apoyos son idénticas.

En relación con esto, la expresión (6.5) adquiere el aspecto:

$$M_k = \frac{R}{l}(l - c_k - z_k)\, z_k + \frac{qz_k(l-z_k)}{2} - \frac{qa^2}{2} - \sum P_i^{izq}(c_i - c_k) \qquad (6.28)$$

para

$$c_i - c_k - a \leqslant z_k \leqslant l + c_n - c_k + a. \qquad (6.29)$$

Por cuanto la magnitud $\Delta M = -\frac{qa^2}{2}$ no introduce modificaciones en la ecuación $\frac{dM_k}{dz_k} = 0$, entonces, la expresión (6.10) se puede escribir directamente:

$$M_{k,\,máx} = \left[\frac{R}{l}(l - c_k) + \frac{ql}{2}\right]^2 : \left(4\frac{R}{l} + 2q\right) - \frac{qa^2}{2} - \sum P_i^{izq}(c_i - c_k). \qquad (6.30)$$

Todas las demás expresiones, expuestas para la viga simple, y las conclusiones extraídas de ellas se conservan o se adaptan fácilmente para las vigas de doble voladizo, debido a la ampliación de los límites de variación de z_k.

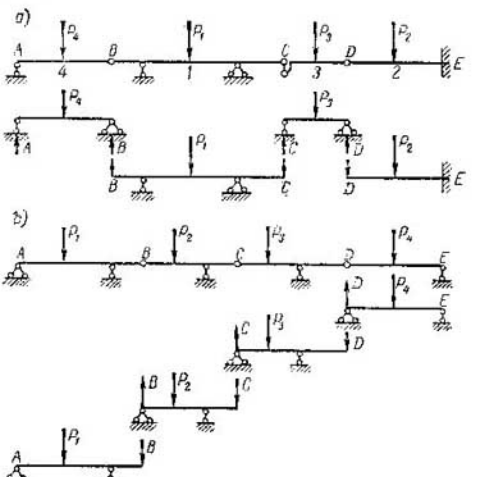
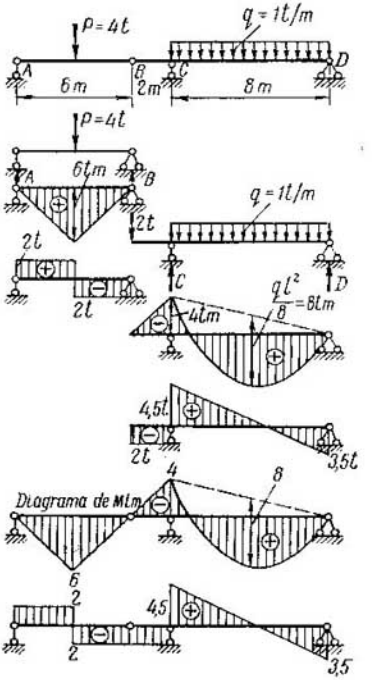


Fig. 88

§ **47.** DIAGRAMA DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y LAS FUERZAS TRANSVERSALES EN LAS VIGAS ARTICULADAS. Como fue señalado anteriormente, conviene hacer el cálculo de las vigas articuladas en el orden inverso al de su for-

Fig. 89



mación, desde las complementarias a las fundamentales. Durante el cálculo de la viga, es cómodo dividirla en partes, separando las vigas complementarias de las fundamentales y aplicando sobre las últimas la presión de las complementarias omitidas. En adelante, las vigas fundamentales las vamos a representar más bajas que las complementarias (fig. 88). En la viga articulada, representada en la fig. 88, *a*, primero deberán ser calculadas las vigas *AB* y *CD* y luego las *BC* y *DE*. En la representada en la fig. 88, *b* deberá ser calculada la viga *DE*, a continuación la *CD*, luego la *BC* y, por fin, la *AB*.

Ejemplo 9. Construir el diagrama de M y Q en la viga (fig. 89).

Viga *AB*: las reacciones en los apoyos son $A = B = \frac{P}{2} = 2$ tf; los diagramas de M y Q fueron construidos bajo la viga. Los diagramas en la viga articulada dada se obtuvieron uniendo los construidos con anterioridad.

§48. METODO ESTATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE LOS APOYOS, DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y DE LAS FUERZAS TRANSVERSALES EN LAS VIGAS ARTICULADAS. La construcción de las líneas de influencia para las vigas articuladas se basa en su exacta división en partes componentes, en fundamentales y complementarias.

Si cualquier parte de la viga es sólo complementaria, entonces, la carga, dispuesta sobre las partes que, con respecto a la complementaria, son fundamentales, no provoca en ella fuerzas internas. Por eso, tal viga complementaria representa en sí una viga de un solo tramo, para la cual ha sido ya explicada la construcción de las líneas de influencia.

Si cualquier parte de la viga, con respecto a unas partes de ella, resulta complementaria, y con respecto a otras, fundamental, entonces, al construir las líneas de influencia, ante todo, es necesario excluir del examen aquellas partes de la viga que, con respecto a la investigada, son fundamentales, dado que las cargas ubicadas sobre estas últimas no ejercen influencia sobre la parte examinada.

Al construir las líneas de influencia, en tal parte de la viga articulada, es imprescindible estudiarla conjuntamente con las otras partes de esta viga, para las cuales ella es fundamental. Al principio es indispensable examinar el peso $P = 1$ sobre el propio elemento que se examina. Con tal disposición de la carga, todas las vigas complementarias, respecto a la que se examina, permanecerán sin carga y, temporalmente, pueden ser excluidas del examen. Después de esto, la viga examinada se transforma en simple, para la cual, las líneas de influencia se construyen por las reglas ya conocidas.

A continuación, el peso $P = 1$ se coloca en la primera viga complementaria, que se apoya y actúa sobre la examinada. Cuando el peso ocupa la posición sobre el lugar de unión de estas vigas, la presión sobre la fundamental es igual a la unidad, pero, cuando se ubica sobre el segundo apoyo de la viga complementaria, es igual a cero. En correspondencia con esto, cuando el peso está sobre la articulación, el valor buscado es igual a la ordenada de la línea de influencia, obtenida con anterioridad en este lugar y, cuando está sobre el segundo apoyo de la viga complementaria, el valor buscado es igual a cero. Por consiguiente, en el primer caso, la línea de influencia debajo de la articulación es continua y, en el segundo, la ordenada es igual a cero.

Dos ordenadas de la línea de influencia, dentro de los límites de la viga complementaria, han sido halladas. Por cuanto la acción de la viga complementaria sobre la fundamental varía linealmente, entre estos dos puntos, dentro de los límites de la viga complementaria, deberá ser trazado un segmento de recta. Si la viga complementaria que examinamos es fundamental respecto a la viga siguiente, la línea de influencia puede ser prolongada sobre la segunda viga complementaria por la misma regla.

Así, por ejemplo, para la viga expuesta en la fig. 90, la línea de influencia en la parte CD se debe construir como en la viga sobre dos apoyos C y D'; en la zona BC, como en la viga sobre dos apoyos B y B', agregando la viga complementaria CD y, por fin, en la zona AB, como en la viga sobre dos apoyos A y A', agregando las vigas complementarias BC y CD.

Si en la sección de la viga AB se exigiera construir la línea de influencia del momento flector, entonces, se debe proceder así. Al principio, examinando sólo la viga AB, se debe construir la línea de influencia de este momento como en una viga simple (fig. 90, *b*). Luego, examinando la primera viga complementaria BC, tenemos que trazar una recta por la ordenada de la línea de influen-

cia en su extremo izquierdo y por el punto de la base debajo de su segundo apoyo. Por fin, repetir lo mismo para la tercera viga CD (fig. 90, c).

Las líneas de influencia de la reacción del apoyo, del momento flector y de la fuerza transversal de la fig. 91 fueron construidas por

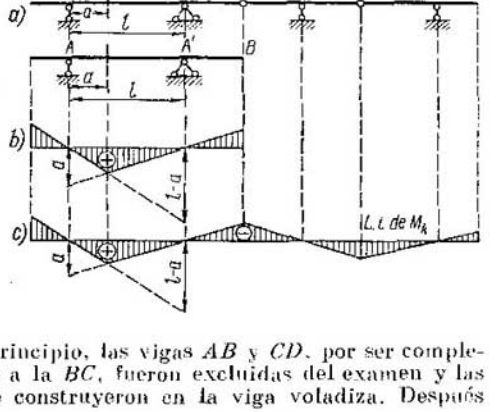


Fig. 90

esta misma regla. Al principio, las vigas AB y CD, por ser complementarias con respecto a la BC, fueron excluidas del examen y las líneas de influencia se construyeron en la viga voladiza. Después

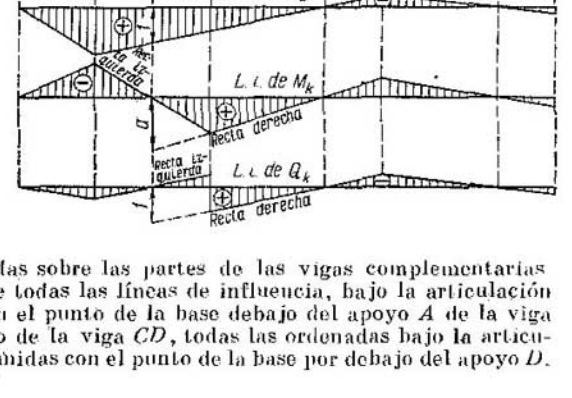


Fig. 91

fueron prolongadas sobre las partes de las vigas complementarias. Las ordenadas de todas las líneas de influencia, bajo la articulación B, se unieron con el punto de la base debajo del apoyo A de la viga AB, y por debajo de la viga CD, todas las ordenadas bajo la articulación C, fueron unidas con el punto de la base por debajo del apoyo D.

§ 49. METODO CINEMATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO, DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y DE LAS FUERZAS TRANSVERSALES EN LAS VIGAS ARTICULADAS. La ecuación de las líneas de influencia puede ser compuesta en base a la expresión general (5.7).

El diagrama de las traslaciones verticales Δ_p conviene construirlo por el método de los centros instantáneos. A las reglas ya conocidas de determinación de estos últimos, es necesario agregar, que el centro instantáneo, respecto a la tierra, de la parte de la viga fijada a la misma con un solo apoyo rodante, se sitúa en el punto de apoyo, y la parte de la viga, fijada a la tierra de modo invariante, puede ser tomada junto con la tierra como un solo disco.

En la fig 92 se da la construcción de las líneas de influencia de la reacción del apoyo izquierdo de la parte fundamental. En este caso, la l.i. de $A = -\frac{\Delta_P}{\Delta_A}$. La magnitud $\Delta_A < 0$, lo que significa, que el signo de la línea de influencia coincide con el del diagrama de desplazamientos. El segmento Δ_A, al que es necesario tomar igual a la unidad, sirve como escala de la línea de influencia.

En la fig. 93 se da la construcción de la línea de influencia del momento flector. Aquí, la l.i. de $M_k = -\frac{\Delta_P}{\Delta_M}$ y $\Delta_M = -(d\varphi_2 + d\varphi_3)$. También en este caso, el signo de la línea de influencia coincide con

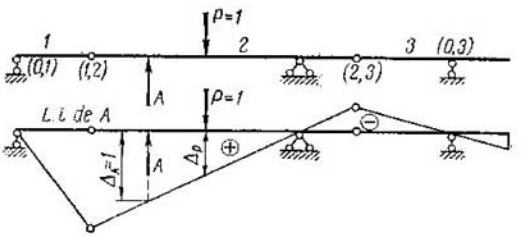


Fig. 92

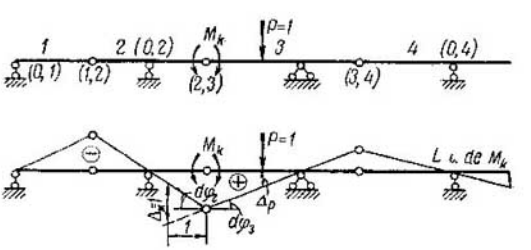


Fig. 93

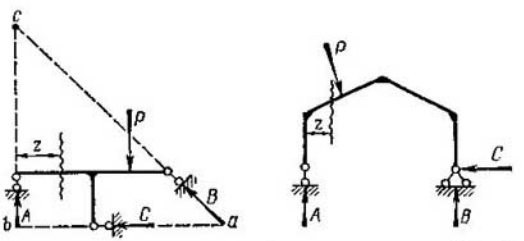
el del diagrama de traslaciones Δ_p. La escala de la línea de influencia se determina de la expresión $d\varphi_2 + d\varphi_3 = 1$, o por la pequeñez de los ángulos, con $\operatorname{tg} d\varphi_2 + \operatorname{tg} d\varphi_3 = 1$.

§ 50. CALCULO DE PORTICOS. Vamos a examinar aquellos pórticos planos estáticamente determinados, en los cuales tres apoyos son rodantes o uno es móvil y el otro fijo (fig. 94).

1. DETERMINACION DE LAS REACCIONES Y CONSTRUCCION DEL DIAGRAMA DE LOS MOMENTOS FLECTORES, DE LAS FUERZAS TRANSVERSALES Y DE LAS FUERZAS LONGITUDINALES

Las reacciones de apoyo se determinan de las tres ecuaciones de equilibrio. Para tres apoyos rodantes, las ecuaciones de equilibrio se recomienda escribirlas en forma de la suma de los momentos con respecto a los puntos de intersección de las otras dos reacciones. Así,

Fig. 94



al determinar la reacción A, por punto de los momentos se deberá tomar el punto a de intersección de las reacciones B y C; al determinar la reacción B, el punto b de intersección de las reacciones A y C y, al determinar la reacción C, el punto c de intersección de las reacciones A y B. En aquellos casos, cuando dos reacciones son paralelas, la tercera se calcula de la ecuación de equilibrio, como suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje perpendicular a estas reacciones paralelas. Para un apoyo rodante y el otro fijo, se recomienda componer las ecuaciones de equilibrio, al principio, como la suma de los momentos con respecto al apoyo fijo, luego, como la suma de los momentos con respecto al punto de intersección de las reacciones A y C y, por fin, como la suma de las proyecciones sobre el eje perpendicular a A y B.

Para la construcción de los diagramas de M, Q y N se traza un corte o sección que divide al pórtico en dos partes (fig. 94). El corte se dispone en los puntos característicos, o se fija con alguna ordenada corriente. Las fuerzas internas se determinan por las normas generales (§ 20). En este caso vamos a atenernos al siguiente orden:

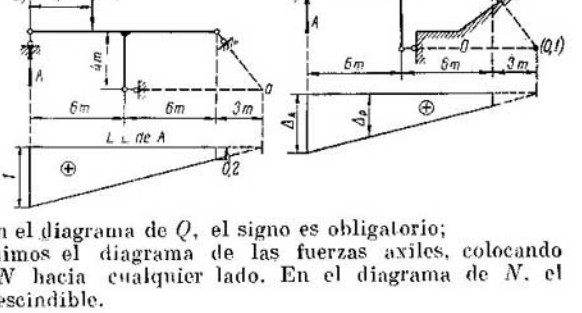
a) fijamos la posición del observador con respecto a la sección trazada de la barra, para que quede en claro cuál parte de la barra es «izquierda» y cuál «derecha», a cuáles fuerzas considerarlas «derechas» y a cuáles «izquierdas». Esto se puede hacer con diferentes

procedimientos. Se puede, por ejemplo, indicar en el dibujo, cerca de la sección, los lados izquierdo y derecho de la barra o, bajo cada una, señalar su elemento infinitesimal con las direcciones positivas de sus fuerzas internas (véase fig. 44) o, por fin, convenir simplemente en girar imaginariamente todas las barras hacia uno u otro lado hasta que coincidan con la horizontal. Por ejemplo, girar las barras verticales en 90° en sentido de las agujas del reloj y, las inclinadas, en un ángulo menor de 90°;

b) construimos el diagrama de los momentos flectores en el lado traccionado de la barra. Aquí, el diagrama no llevará signo;

c) construimos el diagrama de las fuerzas transversales colocando sus valores positivos por arriba de la barra, presentada en posición

Fig. 95



horizontal. En el diagrama de Q, el signo es obligatorio;

d) construimos el diagrama de las fuerzas axiles, colocando el valor de N hacia cualquier lado. En el diagrama de N, el signo es imprescindible.

2. LINEA DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO, DE LOS MOMENTOS FLECTORES, DE LAS FUERZAS LONGITUDINALES Y TRANSVERSALES

La construcción de las líneas de influencia de las reacciones de apoyo y de las fuerzas internas en los pórticos planos, estáticamente determinados, se efectúa en base a las reglas generales expuestas anteriormente. Así, por ejemplo, hallamos la ecuación de la línea de influencia de la reacción del apoyo A (fig. 95): $\Sigma M_c = A \cdot 15 - 1\,(15 - z) = 0$, de donde, la l.i. de $A = \frac{15-z}{15}$.

Para $z = 0$, $A = 1$, si $z = 12$ m, $A = 0{,}2$. La línea de influencia se muestra en la fig. 95, *a*. Esta misma línea de influencia puede ser construida por el método cinemático. Omitiendo el vínculo de apoyo convertimos el sistema en monovariante, compuesto de un solo disco (fig. 95, *b*). Su centro instantáneo de rotación, con respecto a la tierra, se halla en la intersección de las restantes barras de apoyo. Al disco le comunicamos un desplazamiento infinitesimal, girándolo con respecto al centro instantáneo (0, 1). La escala de la línea de influencia se determina con la expresión $\Delta_A = 1$.

§ 51. MATRIZ DE INFLUENCIA DE LOS MOMENTOS FLECTORES. Los renglones de la matriz de influencia de los momentos flectores de cualquier viga o pórtico se obtienen de la línea de influencia del momento flector de la correspondiente sección. Expongamos cómo se hace esto en una viga simple. Hallamos la i-ésima línea de

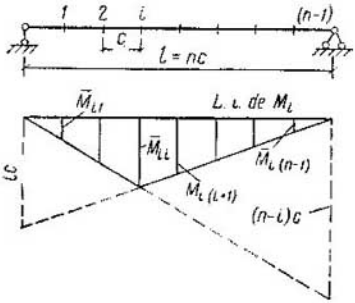


Fig. 96

la matriz por la línea de influencia del momento en la i-ésima sección representada en la fig. 96. Sobre la línea de influencia se han señalado las ordenadas determinantes de la i-ésima línea de la matriz:

$$\left.\begin{aligned} &\text{para } k \leqslant i;\ \overline{M}_{ki} = \frac{l}{n^2}\, k\,(n-i); \\ &\quad\text{»}\quad k \geqslant i;\ \overline{M}_{ki} = \frac{l}{n^2}\, i\,(n-k). \end{aligned}\right\} \qquad (6.31)$$

CAPITULO VII * CALCULO DE LAS ARMADURAS DE VIGA O VIGAS ARMADAS ARTICULADAS, ESTATICAMENTE DETERMINADAS

§ 52. TIPOS DE VIGAS ARMADAS. Las vigas armadas, según sea la distribución de los apoyos, pueden ser: simples, cuando dos apoyos están situados en los extremos de la viga; voladas o cantilever, cuando los apoyos no se encuentran en los extremos de la viga y armaduras de consola, cuando los dos apoyos de la viga se encuentran en uno de sus extremos.

Por la configuración de sus cordones las armaduras suelen ser de cordones paralelos (fig. 97, *a*) triangulares (fig. 97, *b*) y poligonales (fig. 97, *c*).

Las celosías o enrejado de las armaduras se dividen en: enriostradas (fig. 98, *a*), cuando las riostras o diagonales se alternan con los pendolones; triangulares (fig. 98, *b*), cuando las diagonales en una dirección se alternan con las diagonales en la otra dirección;

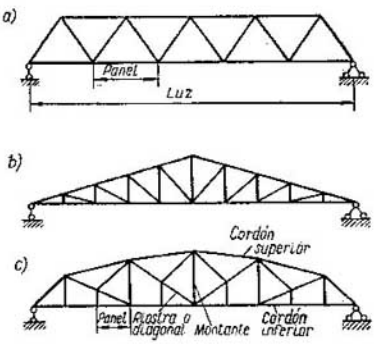


Fig. 97

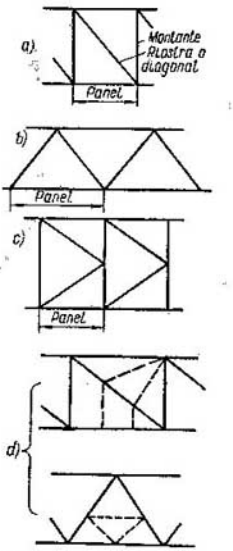


Fig. 98

semienriostradas (fig. 98, *c*), cuando en la celosía enriostrada, en lugar de una diagonal, en el panel se colocan dos de menor longitud y, pendolares (fig. 98, *d*), cuando en una celosía enriostrada o triangular hay colocadas barras pendolares, pendolones y suspensiones complementarias (señalados con puntos), que trabajan sólo bajo cargas locales y dividen al panel del larguero de carga de la armadura básica en dos o más partes.

A las celosías triangulares, enriostradas y semienriostradas se las denomina simples.

§ 53. METODO ESTATICO DE DETERMINACION DE LAS FUERZAS AXILES (ESFUERZOS), DEBIDAS A LAS CARGAS FIJAS, EN LAS BARRAS DE LAS ARMADURAS. La determinación de las fuerzas internas en las barras de las armaduras se efectúa por sus esquemas de cálculo. Para la transmisión nodal de la carga, comúnmente, como esquema de cálculo de una armadura se emplea la armadura articulada. El cálculo basado en tal esquema teórico es aproximado. Este no tiene en cuenta la influencia de la rigidez de la unión de los elementos de la armadura en los nudos, la cual es tanto mayor, cuanto mayor es el coeficiente de rigidez de las barras $\frac{EI}{l}$. Por cuanto, en el caso de carga nodal, para muchas arma-

duras, la influencia de la rigidez de los nudos no es demasiado grande, la práctica, en estos casos, acepta las inexactitudes de tal cálculo. Para las armaduras en las que no es posible despreciar la influencia de la rigidez de los nudos, el cálculo por el esquema articulado resulta una primera aproximación, al que será necesario introducir correcciones. En adelante, sólo serán examinados los métodos para calcular armaduras articuladas.

Cada barra de una armadura articulada puede ser examinada como vínculo de primer tipo. Por eso, todos los procedimientos de determinación de las reacciones de los vínculos de los distintos sistemas, con carga fija, son utilizables también para la determinación de las fuerzas axiles en las barras de las armaduras. En virtud de esto solamente nos queda exponer el empleo de estos procedimientos en ejemplos sueltos y aclarar algunos de sus detalles.

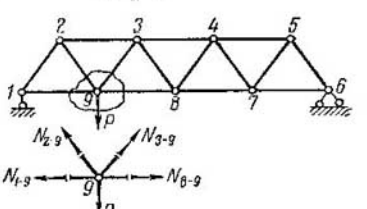
La determinación de las fuerzas axiles por el método estático se basa en el método general de cortes, por medio de los cuales se separa de la armadura una parte de ella. En las barras seccionadas con los cortes, las fuerzas internas, con respecto a las partes cortadas de la armadura, son examinadas como externas. Luego se estudia el equilibrio de una cualquiera de las partes seccionadas.

1. CALCULO ANALITICO

Procedimiento de recorte de nudos

El procedimiento de recorte de nudos consiste en que, con los seccionamientos, estos nudos se separan sucesivamente uno tras otro de la armadura y se examina su equilibrio (fig. 99). Para las fuerzas

Fig. 99



de cada nudo recortado se componen dos ecuaciones de equilibrio, en forma de la suma de proyecciones sobre dos ejes cualesquiera no paralelos $\Sigma X = 0$ y $\Sigma Y = 0$.

Si en los nudos recortados hay sólo dos fuerzas incógnitas, entonces, ellas pueden ser determinadas de las ecuaciones independientes. Para esto es imprescindible componer las sumas de las proyecciones de las fuerzas sobre dos ejes perpendiculares a las fuerzas buscadas (fig. 100, *a*). Si las incógnitas en el nudo son más de dos, entonces, en el caso general, ninguna de ellas puede ser calculada recortando solamente un nudo. La única excepción será el caso particular cuando en el nudo recortado converjan tres fuerzas incógnitas y dos de

ellas estén sobre una misma recta (fig. 100, *b*). En este caso, la fuerza N_1 puede ser determinada proyectando las fuerzas sobre el eje perpendicular a las dos fuerzas incógnitas, pertenecientes a la misma recta

$$\Sigma Y = N_1 \operatorname{sen} \alpha - P = 0.$$

Hablando en general, por el método de recorte de nudos puede ser efectuado el cálculo de cualquier armadura estáticamente determinada. Sin embargo, para las armaduras complejas, este método nos conduce a una gran cantidad de ecuaciones conjuntas y, para ellas, se emplea principalmente como auxiliar.

Fig. 100

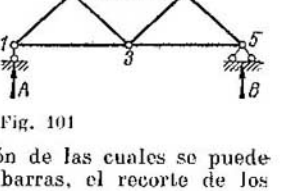


Fig. 101

En las armaduras simples, la formación de las cuales se puede seguir agregando nuevos nudos con dos barras, el recorte de los nudos debe ejecutarse en sucesión a su formación, lo cual, en cada nuevo nudo recortado, nos conduce a no más de dos fuerzas incógnitas. Así, por ejemplo, en la armadura de la fig. 101 con la numeración de los nudos se ha designado la sucesión de su recorte. En el nudo *1* hay dos fuerzas incógnitas, las $N_{1\text{-}2}$ y $N_{1\text{-}3}$. En el *2*, donde convergen tres barras, las incógnitas de nuevo son dos, dado que la fuerza $N_{1\text{-}2}$ se determinó al recortar el nudo *1*. En el *3* hay cuatro barras, pero las fuerzas $N_{1\text{-}3}$ y $N_{2\text{-}3}$ en dos de las barras fueron determinadas al recortar los nudos *1* y *2*. Cierta insuficiencia del procedimiento, en este caso, radica en que la inexactitud o error, al calcular la fuerza en una barra cualquiera, se refleja en los valores de las fuerzas determinadas a continuación. De control puede servir el equilibrio del último nudo *5*, en cuyas barras las fuerzas fueron determinadas antes.

Método de cortes simples

El método de cortes simples se emplea cuando con uno de ellos se puede dividir a la armadura en dos partes, siendo las fuerzas incógnitas en esta sección no más de tres. A esta condición la satisfacen los cortes que pasan por tres barras. Las ecuaciones de equilibrio se componen de tal modo, que cada una de ellas contenga sólo una incógnita. Para esto es indispensable componerlas en forma de la suma de los momentos con respecto al punto de intersección de las otras dos fuerzas incógnitas, o en forma de la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje perpendicular a dos barras, si éstas son paralelas. Así, por ejemplo, para la determinación de los

Fig. 102

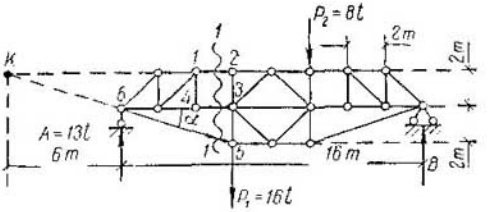
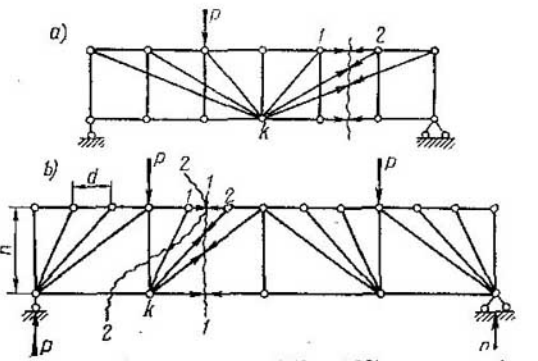


Fig. 103



esfuerzos en las tres barras, por la sección *1 — 1* (fig. 102), es necesario componer las condiciones de equilibrio de la siguiente manera:

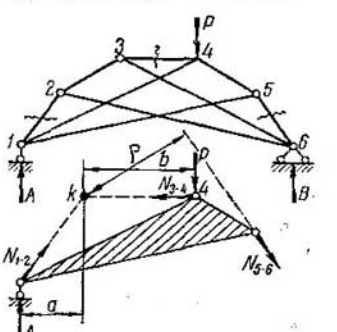
1) para la determinación de $N_{1\text{-}2}$

$$\sum M_0^{izq} = 13 \cdot 0 + N_{1\text{-}2} \cdot 2 = 0, \text{ de donde } N_{1\text{-}2} = 0;$$

2) para la determinación de $N_{3\text{-}4}$

$$\sum M_k^{izq} = -13 \cdot 6 - N_{3\text{-}4} \cdot 2 - 0, \text{ de donde } N_{3\text{-}4} = -39 \text{ tf};$$

Fig. 104



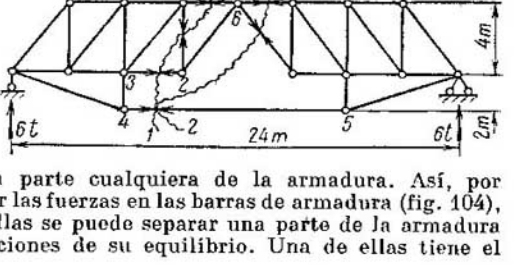
3) para la determinación de $N_{5\text{-}6}$

$$\sum Y^{izq} = 13 - N_{5\text{-}6} \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0, \text{ de donde } N_{5\text{-}6} = 13 : \operatorname{sen}\alpha.$$

Si el corte secciona cuatro y más barras con fuerzas incógnitas, entonces, en el caso general, la determinación de estas últimas de una sola sección es imposible. Sólo cuando todas las barras seccionadas se cortan en un punto, excepto una (fig. 103), en ésta es posible determinar la fuerza por una sola sección. Para esto es indispensable componer la suma de los momentos de todas las fuerzas aplicadas a una sola parte de la armadura, con respecto al punto de intersección k de todas las barras restantes.

Hasta ahora representamos el corte con una línea continua, que dividía al esquema de la armadura en dos partes. Tal representación del corte no es obligatoria. Lo esencial es, con el corte de barras

Fig. 105



aisladas, separar una parte cualquiera de la armadura. Así, por ejemplo, al determinar las fuerzas en las barras de armadura (fig. 104), seccionando tres de ellas se puede separar una parte de la armadura y componer las ecuaciones de su equilibrio. Una de ellas tiene el aspecto:

$$\sum M_k = Aa + Pb + N_{5\text{-}6} \cdot \rho = 0, \text{ de donde } N_{5\text{-}6} = -\frac{Aa + Pb}{\rho}.$$

Ejemplo 10. Determinar la fuerza longitudinal $N_{1\text{-}2}$ (v. fig. 103, *b*).

Trazar un corte que seccione a la barra *1—2* y solamente a otras dos es imposible. Por ejemplo, las secciones *1—1* y *2—2* cortan tres barras más. Pero en una y otra sección, las tres barras restantes se cortan en un punto k. Esto significa, que la fuerza puede ser determinada de una sola sección. Tomamos el punto k como punto del momento. Entonces

$$\sum M_k^{izq} = P \cdot 3d + N_{1\text{-}2} h = 0, \text{ de donde } N_{1\text{-}2} = -\frac{P \cdot 3d}{h}.$$

Ejemplo 11. Determinar la fuerza longitudinal $N_{1\text{-}2}$ (fig. 105).

Trazamos la sección *I—I*. A pesar de que el corte pasa por cuatro barras, tres de ellas son paralelas. Esto significa que la fuerza $N_{1\text{-}2}$ puede ser determinada de un solo corte:

$$\sum Y^{izq} = A - N_{1\text{-}2} - 0, \text{ de donde } N_{1\text{-}2} = A = 6 \text{ tf}.$$

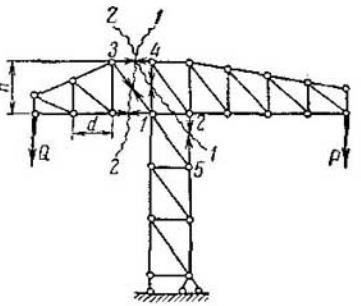
Determinar las fuerzas longitudinales restantes en las barras cortadas por la sección *I—I* ya es imposible. Así, por ejemplo, la suma de los momentos con respecto al punto *1*,

$\sum M_1^{izg} = 6 \cdot 9 - N_{4\text{-}5} \cdot 6 - N_{2\text{-}3} \cdot 4 = 0$ contiene dos fuerzas incógnitas $N_{2\text{-}3}$ y $N_{4\text{-}5}$. En tales casos puede ser empleado el procedimiento de cortes conjuntos.

Procedimiento de cortes conjuntos

El procedimiento de cortes conjuntos se emplea cuando en la sección hay más de tres fuerzas incógnitas sujetas a determinación y el procedimiento de cortes simples no es aplicable. La idea del empleo conjunto de varios cortes consiste en componer tales ecuaciones de equilibrio que contengan sólo varias fuerzas incógnitas, en cantidad igual al número de barras seccionadas con el primer corte, menos dos. Por eso, al emplear este procedimiento es indispensable componer las ecuaciones de equilibrio de tal modo, que

Fig. 106



no contengan otras incógnitas, aparte de las fuerzas incógnitas sujetas a determinación.

Para dos secciones conjuntas se pueden determinar dos incógnitas, si por estas secciones es posible componer dos ecuaciones de equilibrio que contengan, solamente, dos fuerzas determinables. Para tres secciones conjuntas se pueden determinar tres incógnitas, si por estas secciones es posible componer tres ecuaciones de equilibrio que contengan sólo tres fuerzas incógnitas sujetas a determinación. Y así sucesivamente. De esto se deduce, que cada corte deberá seccionar aunque no sea más que una de las barras, en la cual se determina la fuerza axil. En adelante, a excepción de ciertos casos particulares, el corte deberá seccionar no más de dos barras con fuerzas incógnitas. Con otras palabras, es necesario recordar que, *en todas las circunstancias, dos fuerzas incógnitas, en las otras barras no sujetas a determinación en la etapa dada del problema, pueden ser excluidas de la ecuación de equilibrio*. Para cada una de las secciones conjuntas se compone sólo una ecuación de equilibrio.

Por estas reglas es necesario guiarse al elegir los cortes conjuntos. Así, por ejemplo, al determinar la fuerza $N_{1\text{-}2}$ (fig. 106), es imposible efectuar una sección que corte a esta barra y a otras dos y divida a la armadura en dos partes. Por eso, es necesario, si es posible, tratar de trazarla a través de otras tres. Tal sección será el corte *1—1*. Componiendo la suma de las proyecciones sobre el eje horizontal excluimos de las condiciones de equilibrio a $N_{1\text{-}1}$ y $N_{2\text{-}5}$:

$$\sum X^{\text{der}} = -N_{1\text{-}2} - N_{3\text{-}4} = 0.$$

La ecuación contiene la fuerza incógnita $N_{3\text{-}4}$ que, en este caso, no nos interesa. Es necesario un segundo corte que seccione a la barra *3—4* y a otras dos, si esto es posible, pero si no, que pase a través de las barras *1—2* y *3—4* y de otras dos. En nuestro caso, el corte

2—2 se puede efectuar por la barra *3—4* y otras dos, al mismo tiempo que la ecuación de equilibrio, precisamente, la suma de momentos de fuerzas con respecto al punto *1*

$$\sum M_1^{izq} = -Q \cdot 3d + N_{3-4} h = 0,$$

contiene también sólo a la incógnita N_{3-4}.

De estas dos ecuaciones se determina la fuerza buscada N_{1-2}.

Las dos ecuaciones para la determinación de las fuerzas N_{2-5} y N_{3-5} en las riostras de la armadura semienriostrada se componen análogamente (fig. 107). Efectuamos el corte *I—I* y componemos las ecuaciones de equilibrio

$$\sum Y^{izq} = A + N_{2-5} \operatorname{sen} \alpha - N_{3-5} \operatorname{sen} \beta = 0.$$

La segunda sección será el corte alrededor del nudo *5* (su recorte). Para excluir de la ecuación de equilibrio a las fuerzas N_{1-5} y N_{4-5}

Fig. 107

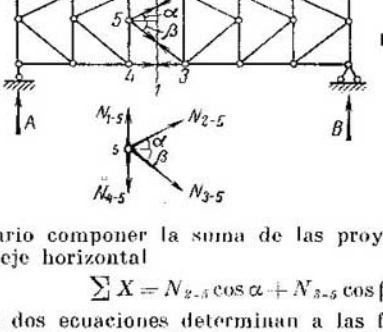
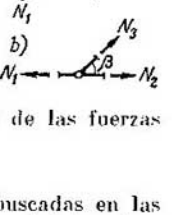


Fig. 108



es necesario componer la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje horizontal

$$\sum X = N_{2-5} \cos \alpha + N_{3-5} \cos \beta = 0.$$

Estas dos ecuaciones determinan a las fuerzas buscadas en las riostras. En el ejemplo **11**, la sección suplementaria al determinar la fuerza N_{2-5} será la sección *2—2* (véase la fig. 105), de la cual se determina fácilmente N_{1-5}.

2. CALCULO GRAFICO

El cálculo gráfico de las armaduras se basa en las reglas de la determinación gráfica de las reacciones de los vínculos. El más cómodo de los procedimientos de cálculo es el de Máxwell — Cremona, de la sucesiva determinación gráfica de las fuerzas incógnitas en los nudos recortados de la armadura. Este método nos lleva a la construcción del diagrama conocido en la mecánica teórica.

§ 54. ALGUNAS REGLAS QUE SE DESPRENDEN DEL EQUILIBRIO DE LOS NUDOS. El procedimiento de recorte de nudos permite establecer algunas reglas simples sobre los valores de las fuerzas axiles en las barras de las armaduras articuladas.

1. Si en el nudo convergen dos barras y no hay carga nodal (fig. 108, *a*), entonces, ellas no trabajan, esto es, en ambas barras las fuerzas axiles son iguales a cero. Esta regla se desprende de las ecuaciones de equilibrio que expresan a la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre los ejes perpendiculares a las barras.

2. Si en el nudo convergen tres barras, al mismo tiempo que dos de ellas se encuentran sobre una misma recta y no hay carga nodal (fig. 108, *b*), entonces, la fuerza axil en la tercera barra adyacente es igual a cero, mientras que las fuerzas que actúan sobre las dos barras restantes son iguales entre sí:

$$\Sigma Y = N_3 \operatorname{sen} \beta = 0, \quad \text{de donde} \quad N_3 = 0;$$

$$\Sigma X = -N_1 + N_2 + N_3 \cos \beta = 0, \quad \text{de donde} \quad N_1 = N_2.$$

§ 55. METODO ESTATICO DE DETERMINACION DE LAS FUERZAS AXILES, DEBIDAS A LA CARGA FIJA, EN LAS BARRAS DE LAS ARMADURAS CON ELEMENTOS COMPLEJOS. Las armaduras con elementos complejos son tales, que sus elementos sueltos representan en sí armaduras independientes (fig. 109). Examinemos uno de los elementos complejos cargados, por ejemplo, el *2—3*. Separémoslo de la armadura (fig. 109, *b*), aplicándole al mismo tiempo las fuerzas reactoras X e Y por parte de las partes omitidas, cuyas dirección y magnitud, por ahora, se ignoran. Sobre la parte restante de la armadura también actúan fuerzas iguales y de dirección contraria (fig. 109, *c*). A la resultante de las fuerzas externas dadas aplicadas al elemento complejo la designamos R. Descompongamos las incógnitas X e Y en dos direcciones: una paralela a la resultante R y la otra, por la recta que pasa a través de los puntos *2* y *3*. A las componentes de la fuerza X las designamos con A^* y $S_{2\text{-}3}$ y, a las de la Y, con B^* y $S_{3\text{-}2}$. Compongamos las tres ecuaciones de equilibrio del elemento complejo separado. De la $\Sigma M_3 = 0$ determinamos A^*, de la ΣM_2 determinamos B^* y de la $\Sigma u = S_{2\text{-}3} \cos \alpha - S_{3\text{-}2} \cos \alpha = 0$ hallamos $S_{2\text{-}3} = S_{3\text{-}2} = S$.

Descompongamos también las fuerzas X e Y que actúan sobre la parte restante de la armadura, por parte del elemento complejo, en las mismas componentes.

Para la armadura sin el elemento complejo, que se encuentra en equilibrio, las fuerzas $S_{2\text{-}3}$ y $S_{3\text{-}2}$ son fuerzas externas. Puesto que $S_{2\text{-}3} = S_{3\text{-}2}$ convencionalmente, estas fuerzas externas pueden ser examinadas como fuerzas internas de la barra ubicada entre los nudos *2—3*. De esta manera, el elemento complejo es sustituido por uno simple. Sobre la armadura con el elemento sustituido, en lugar de la resultante R, actuarán las fuerzas A^* y B^*, *paralelas a la resultante* R, que representan en sí la presión del elemento complejo sobre los nudos de la armadura. De esto se deducen las reglas de cálculo para las armaduras articuladas con elementos complejos.

1. Cualquier elemento complejo de la armadura debe ser sustituido por una barra simple.

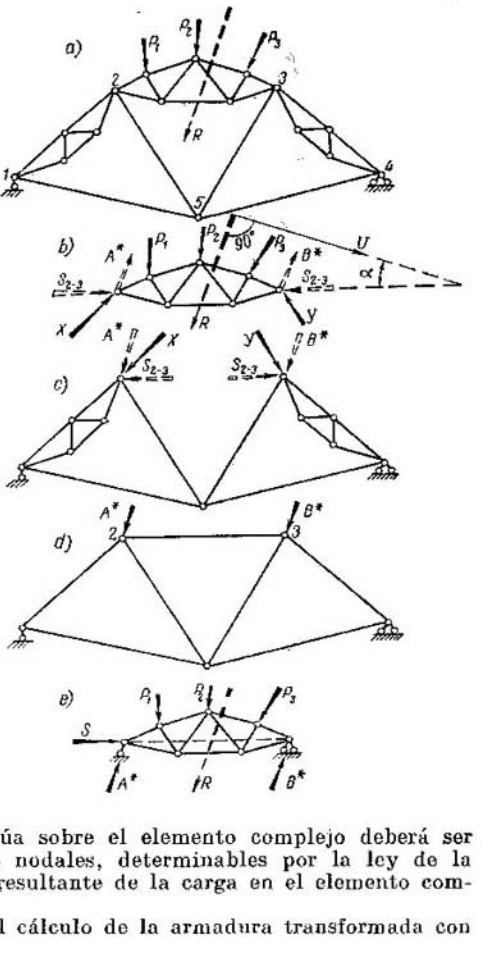
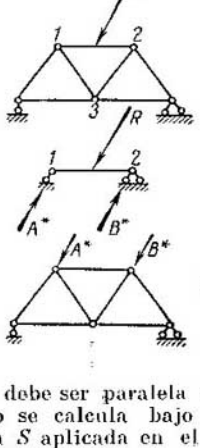


Fig. 109

2. La carga que actúa sobre el elemento complejo deberá ser sustituida por presiones nodales, determinables por la ley de la palanca, paralelas a la resultante de la carga en el elemento complejo.

3. Se debe realizar el cálculo de la armadura transformada con elementos simples.

4. Debe realizarse el cálculo de cada elemento complejo bajo la carga preestablecida, bajo las reacciones de apoyo A^* y B^* y bajo la fuerza S hallada del cálculo de la armadura transformada (fig. 109, *e*). En otras parabras, el elemento complejo debe ser calculado como una armadura sobre dos apoyos: uno rodante, cuya



ig. 110

Fig. 111

barra debe ser paralela a la resultante R, y el otro fijo. El elemento se calcula bajo la carga colocada sobre él y bajo la fuerza S aplicada en el punto móvil de apoyo que pasa por el punto de apoyo fijo (fig. 109, *e*). Análogamente se efectúa el cálculo de las armaduras cuyas cargas actúan directamente sobre las barras simples (fig. 110).

Si la barra que sustituye a un elemento complejo coincide con uno de sus cordones, entonces, todas las barras del elemento complejo, aparte de las barras del cordón que coincide con la barra sustituyente, trabajan sólo bajo la carga que actúa directamente sobre el elemento complejo o, como se usa decir, bajo la carga local. Por eso, al principio, el elemento complejo se calcula sólo bajo la carga aplicada sobre él con las reacciones A^* y B^*, siendo $S = 0$. Luego, a las fuerzas axiles del cordón que coincide con la barra sustituyente es necesario agregar la fuerza axil de esta barra sustituyente, tomada del cálculo de la armadura modificada.

Ejemplo 12. Determinar las fuerzas $N_{2\text{-}8}$, $N_{3\text{-}8}$ y $N_{3\text{-}4}$ (fig. 111).

Separamos el elemento complejo y componemos una armadura con una barra simple sustituyente (fig. 111, *b*, *c*). La fuerza axil en la barra sustituyente *2-5* la determinamos por el corte *I-I*:

$$\sum M_7^{\text{izq}} = P \cdot 8 - P \cdot 4 + N_{2\text{-}5} \cdot 3 = 0;$$

de donde, $N_{2\text{-}5} = -\dfrac{P \cdot 4}{3}$.

Aplicamos esta fuerza al elemento complejo desprendido y determinamos las fuerzas en sus barras (fig. 111, *b*). Del corte *2-2* tenemos:

$$\sum M_3^{izq} = P \cdot 2 - P \cdot \frac{4}{3} 1{,}5 - N_{2-8} \cdot 1{,}5 = 0,$$

de donde,

$$N_{2-8} = 0; \qquad \sum M_8^{izq} = P \cdot 4 - P \cdot 2 + N_{3-4} \cdot 1{,}5 = 0,$$

de donde, $N_{3-4} = -\frac{4P}{3}$; $\qquad \sum Y^{izq} = P - P - N_{3-8} \operatorname{sen} \alpha = 0,$

de donde, $N_{3-8} = 0.$

§ 56. DETERMINACION DE LAS FUERZAS AXILES EN LAS BARRAS DE LAS ARMADURAS, DEBIDAS A CARGA FIJA, POR EL METODO DE SUSTITUCION DE VINCULOS. Examinemos el empleo del método de sustitución de vínculos, para el cálculo de las armaduras articuladas, en un ejemplo concreto.

Sea que se exige determinar la fuerza axil en la barra *2-3* (fig. 112). Eliminamos esta barra y la sustituimos por otro vínculo, por ejemplo, por un apoyo complementario en el nudo *6* (fig. 112, *b*). La acción de la barra eliminada la sustituimos por las fuerzas buscadas X_1. Escribimos la ecuación canónica (3.3), por la cual, la reacción del apoyo complementario es igual a cero:

$$r_{11} X_1 + R_{1P} = 0,$$

donde R_{1P} es la reacción del apoyo agregado, debida a la fuerza P.

Componiendo sucesivamente las ecuaciones de equilibrio de los nudos *2*, *3*, *1* y *7*, nos convencemos de que en todas las barras, excepto en las *4-5*, *4-6* y *5-6*, las fuerzas axiles son iguales a cero. Por

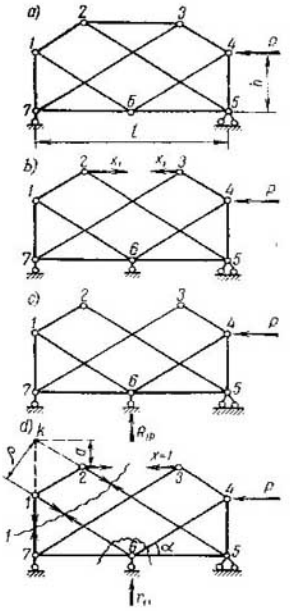


Fig. 112

Fig. 113

eso, R_{1P} se encuentra simplemente:

$$R_{1P}\frac{l}{2} - Ph = 0, \text{ de donde, } R_{1P} = \frac{2Ph}{l}.$$

La reacción r_{11} del apoyo complementario, debida a la fuerza $X_1 = 1$ (fig. 112, *d*), la hallaremos del equilibrio del nudo *6*. Debido a la simetría, $N_{1\text{-}6} = N_{4\text{-}6}$ y, por consiguiente,

$$r_{11} + (N_{1\text{-}6} \operatorname{sen} \alpha)\, 2 = 0,$$

de donde

$$r_{11} = -2N_{1\text{-}6} \operatorname{sen} \alpha.$$

La fuerza $N_{1\text{-}6}$ la hallamos del corte *1—1*:

$$\sum M_k = -1a - N_{1\text{-}6}\, \rho = 0,$$

de donde

$$N_{1\text{-}6} = -\frac{a}{\rho}.$$

Esto significa que $r_{11} = \frac{2a}{\rho} \operatorname{sen} \alpha$. Colocando r_{11} y R_{1P} en la ecuación canónica tendremos que

$$\frac{2a}{\rho} \operatorname{sen} \alpha X_1 + \frac{2Ph}{l} = 0,$$

de donde obtenemos la fuerza buscada

$$X_1 = -\frac{Ph\rho}{al \operatorname{sen} \alpha}.$$

Las fuerzas en las barras restantes se encuentran por la expresión (3.4).

Así, por ejemplo, la fuerza en la barra *1-6* es igual a:

$$N_{1\text{-}6} = \left(-\frac{a}{\rho}\right) X_1 + 0 = \left(-\frac{a}{\rho}\right)\left(-\frac{Ph\rho}{al \operatorname{sen} \alpha}\right) = \frac{Ph}{l \operatorname{sen} \alpha}.$$

En la fig. 113 la armadura articulada es de variabilidad instantánea, puesto que al sustituir análogamente los vínculos, $r_{11} = 0$, o sea, se cumple el signo de variabilidad.

El método de sustitución de vínculos es digno de atención al calcular armaduras articuladas complejas, particularmente, cuando con la sustitución de una barra, la armadura compleja se transforma en simple.

§ 57. ANALISIS DE LAS FUERZAS AXILES, EN LAS BARRAS DE ALGUNAS ARMADURAS DE VIGA SIMPLES, CON CARGA VERTICAL. Imaginémonos una armadura de viga articulada simple, de contorno arbitrario, con celosía de riostras, que se halla sometida a la acción de una carga vertical arbitraria (fig. 114). En esta figura también se muestra el diagrama de momentos flectores debido a la misma carga que actúa sobre una viga de la misma luz. Las fuerzas axiles en las barras de esta armadura, las determinamos en la forma general.

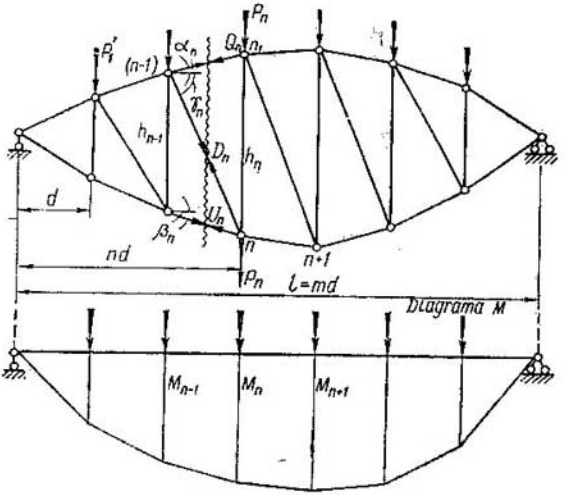


Fig. 114

1. LAS FUERZAS AXILES EN LOS ELEMENTOS DEL CORDON INFERIOR

Componemos la ecuación de equilibrio como la suma de momentos con respecto al nudo $(n-1)'$ del cordón superior

$$M_{n-1} - U_n h_{n-1} \cos \beta_n = 0,$$

donde M_{n-1} es el momento de las fuerzas externas ubicadas a la izquierda de la sección, obteniendo que

$$U_n = \frac{M_{n-1}}{h_{n-1} \cos \beta_n}. \tag{7.1}$$

Para una carga vertical dirigida hacia abajo, el cordón inferior es traccionado.

2. LAS FUERZAS AXILES EN LOS ELEMENTOS DEL CORDON SUPERIOR

Componemos la ecuación de equilibrio como la suma de momentos con respecto al nudo n del cordón inferior

$$M_n + O_n h_n \cos \alpha_n = 0$$

obteniendo

$$O_n = -\frac{M_n}{h_n \cos \alpha_n}. \tag{7.2}$$

Para una carga vertical dirigida hacia abajo, el cordón superior es comprimido.

3. LAS FUERZAS AXILES EN LAS RIOSTRAS O DIAGONALES

Escribimos la ecuación de equilibrio como una suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje horizontal:

$$O_n \cos \alpha_n + U_n \cos \beta_n + D_n \cos \gamma_n = 0.$$

Empleando (7.7) y (7.2), obtenemos

$$D_n = \left(\frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \right) : \cos \gamma_n. \tag{7.3}$$

4. LAS FUERZAS AXILES EN LOS PENDOLONES

Del recorte del nudo n del cordón inferior

$$V_n - P_n - U_{n+1} \operatorname{sen} \beta_{n+1} + U_n \operatorname{sen} \beta_n + D_n \operatorname{sen} \gamma_n = 0.$$

Empleando (7.7) – (7.3) obtenemos

$$V_n = P_n + \frac{M_n}{h_n} \operatorname{tg} \beta_{n+1} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \operatorname{tg} \beta_n - \left(\frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \right) \operatorname{tg} \gamma_n. \tag{7.4}$$

Examinemos ahora las armaduras, en las cuales, las alturas de los pendolones son proporcionales a los momentos de las fuerzas externas izquierdas (a los momentos flectores de la viga), esto es,

$$\frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} = \frac{M_n}{h_n} = H = \text{const} \text{ (fig. 114).}$$

En este caso, la configuración de los cordones no tiene importancia.

De la expresión (7.3), directamente se deduce que $D_n = 0$, es decir, *las riostras no trabajan*.

Según (7.1) y (7.2), las fuerzas axiles en los cordones son iguales a:

$$U_n = \frac{H}{\cos \beta_n}; \quad O_n = -\frac{H}{\cos \alpha_n}. \tag{7.5}$$

Por (7.4), las fuerzas axiles en los pendolones son

$$V_n = P_n + \frac{M_n}{h_n} \operatorname{tg} \beta_{n+1} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \operatorname{tg} \beta_n = P_n + H (\operatorname{tg} \beta_{n+1} - \operatorname{tg} \beta_n). \tag{7.6}$$

Si en tal armadura el cordón inferior es rectilíneo ($\beta_n = \beta_{n+1} = \beta = \text{const}$) y, como caso particular, horizontal, entonces, la fuerza axil en el cordón inferior, a lo largo de toda la extensión, es constante e igual a $U = \frac{H}{\cos \beta}$ y, en el pendolón, $V_n = P_n$. Si además la carga está aplicada sólo sobre el cordón superior, entonces, sólo trabajarán los cordones de la armadura. Esta conclusión también es correcta para las armaduras articuladas, en las cuales, el cordón superior es rectilíneo y la carga está aplicada sólo sobre el inferior.

De esta manera, *en una armadura de viga articulada simple, con un solo cordón rectilíneo, con carga aplicada sólo sobre los nudos del*

otro cordón, si $\frac{M_n}{h_n} = H$ -- const, *las diagonales y los pendolones no trabajan.*

Un caso particular de las armaduras examinadas es la armadura con un cordón horizontal y el otro con sus nudos ubicados en la parábola (armaduras parabólicas) y, en la cual, para carga nodal uniforme, las diagonales y los pendolones del cordón parabólico no trabajan. En una armadura parabólica, si se mantienen invariables las alturas de los pendolones, cualquier quebradura del cordón rectilíneo conserva nulas las fuerzas axiles en las diagonales (fig. 116). Sin embargo, en los pendolones, en los lugares de

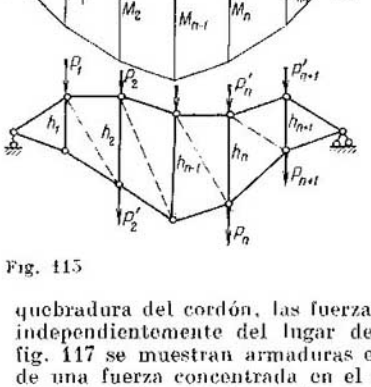


Fig. 115

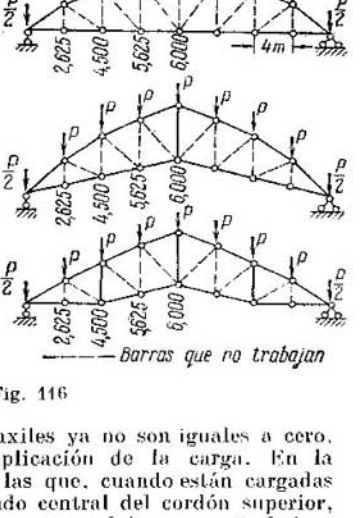


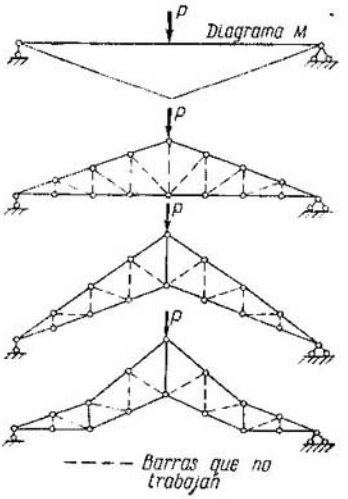
Fig. 116

quebradura del cordón, las fuerzas axiles ya no son iguales a cero, independientemente del lugar de aplicación de la carga. En la fig. 117 se muestran armaduras en las que, cuando están cargadas de una fuerza concentrada en el nudo central del cordón superior, sus diagonales y todos o algunos de sus pendolones, no trabajan.

Si para la armadura no se cumple en toda su extensión la igualdad $\frac{M_n}{h_n} = H = \text{const}$ (fig. 118), entonces las conclusiones obtenidas más arriba son correctas sólo para aquella parte de la armadura (la porción sombreada del diagrama), donde esta igualdad tiene lugar. Examinemos una armadura con cordones paralelos y una triangular bajo carga nodal uniforme (fig. 119). Para $z = nd$ y $l = md$ los momentos de las fuerzas izquierdas pueden ser escritos así:

$$M = \frac{qd^2n(m-n)}{2}. \qquad (7.7)$$

Fig. 117



Para la armadura con cordones paralelos $h_n = h = \text{const}$

$$\alpha_n = \beta_n = 0.$$

Las fuerzas axiles en el cordón inferior

$$U_n = \frac{qd^2}{2} \cdot \frac{(n-1)(m-n+1)}{h} \tag{7.8}$$

y en el superior

$$O_n = -\frac{qd^2}{2} \cdot \frac{n(m-n)}{h} \tag{7.9}$$

crecen desde el apoyo hasta el centro del tramo.

En las riostras de dirección dada, las fuerzas axiles

$$D_n = \frac{1}{h \cos \gamma} (M_n - M_{n-1}) = \frac{1}{h \cos \gamma} \cdot \frac{qd^2}{2} (m + 1 - 2n) \tag{7.10}$$

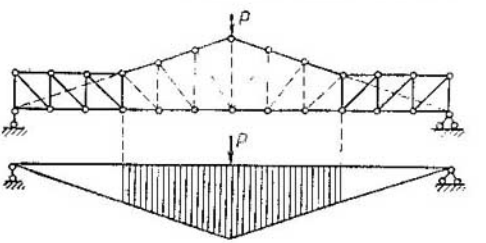
son positivas (las diagonales sufren tracción) y disminuyen desde el apoyo hacia el centro del tramo.

En los pendolones cargados por el cordón superior, los valores de las fuerzas axiles,

$$V_n = -\left(\frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \operatorname{tg} \gamma = \frac{-\operatorname{tg} \gamma}{h} (M_n - M_{n-1}), \tag{7.11}$$

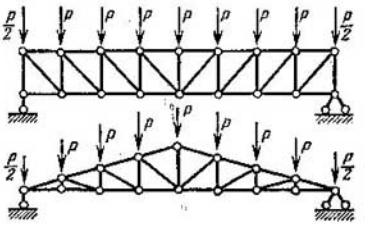
por el signo, son contrarios a los de las fuerzas axiles en las riostras

Fig. 118



(los pendolones sufren compresión) y, numéricamente, también disminuyen desde el apoyo hacia el centro.

Fig. 119



En los elementos simétricos, todas las fuerzas axiles son simétricas. Para la armadura triangular

$$h_n = \frac{2hn}{m}, \quad \beta_n = 0, \quad \alpha_n = \alpha = \text{const},$$

$$\cos\alpha = \frac{md}{2\sqrt{\left(\frac{md}{2}\right)^2 + h^2}}.$$

Las fuerzas en el cordón inferior

$$U_n = \frac{qd^2m}{4h}(m-n+1) \tag{7.12}$$

y en el superior

$$O_n = -\frac{qd^2m}{4h} \cdot \frac{(m-n)}{\cos\alpha} \tag{7.13}$$

disminuyen desde el apoyo hacia el centro del tramo.

Las fuerzas axiles en las riostras

$$D_n = \frac{1}{\cos\gamma_n}\left[\frac{qd^2m}{4h}(m-n-m+n-1)\right] = \frac{-1}{\cos\gamma_n} \cdot \frac{qd^2m}{4h} \tag{7.14}$$

son negativas (las diagonales sufren compresión) y, en los pendolones, positivas (éstos sufren tracción) y, en ambos casos, aumentan del apoyo al centro del tramo.

§ 58. METODO ESTATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO I LAS FUERZAS AXILES EN LAS BARRAS DE LAS ARMADURAS DE VIGA CON CELOSIA SIMPLE. Examinemos la construcción de las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras y de las reacciones de apoyo, en un ejemplo de armadura cantilever (fig. 120). Ante todo, convengamos en llamar cordón *de carga* a aquel cordón, por el cual se desplaza el peso $P = 1$, o, más exacto, a aquel, sobre los nudos del cual, el peso va a transmitir su presión. Como hicimos anteriormente, la posición del peso $P = 1$ sobre la armadura la vamos a fijar con la coordenada z, contada desde el apoyo izquierdo. Las ecuaciones de las reacciones de apoyo y de sus líneas de influencia son iguales que en las vigas:

$$A = \frac{1(l-z)}{l}; \quad B = \frac{z}{l}.$$

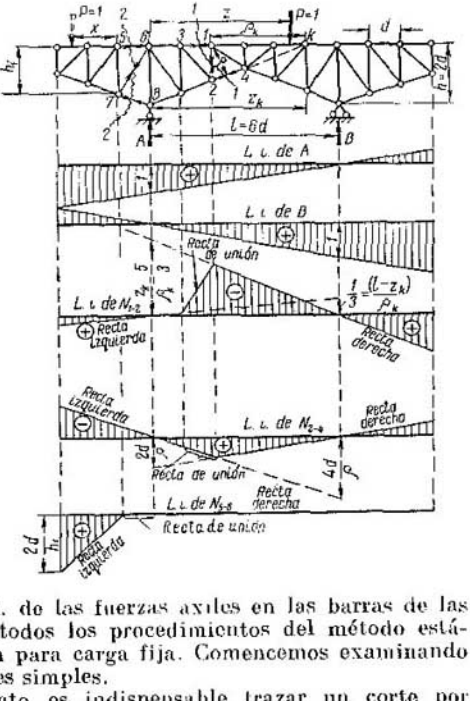


Fig. 120

Para construir las l.i. de las fuerzas axiles en las barras de las armaduras, se emplean todos los procedimientos del método estático de su determinación para carga fija. Comencemos examinando el de los cortes o secciones simples.

Por este procedimiento es indispensable trazar un corte por aquella barra para cuya fuerza axil se determina la línea de influencia y por otras dos. En las armaduras con celosía simple esto casi siempre es posible. En adelante, se deben distinguir dos tipos de secciones: la sección *entre los apoyos*, que divide a la armadura en dos partes, sobre cada una de las cuales actúa una de las reacciones de apoyo, y la sección *de voladizo*, que también divide a la armadura en dos partes, quedando una de ellas libre de reacciones de apoyo. El procedimiento de construcción de las líneas de influencia depende del tipo de corte.

1. CORTE O SECCION ENTRE APOYOS

Examinemos la metodología de la construcción de las líneas de influencia sobre un ejemplo concreto. Sea que se exige construir la línea de influencia de la fuerza axil de la barra *1-2* de la armadura (v. fig. 120). A través de ella y de las barras *1-3* y *2-4* trazamos el corte entre apoyos *1-1*. Como punto de momento tomamos el punto *k* de intersección de las otras dos barras cortadas con la sección. Exami-

nemos la posición del peso a la derecha del corte. Escribimos la condición de equilibrio para la parte *izquierda* de la armadura

$$\sum M^{izq} = A \cdot 5d + N_{1-2} \cdot 3d = 0,$$

$$\text{de donde } N_{1-2} = -A\frac{5d}{3d} = -\frac{(l-z)}{l} \cdot \frac{5}{3}.$$

Podemos construir esta recta derecha por dos puntos. Para $z = 0$, $N_{1-2} = -\frac{5}{3}$ y si $z = l$, $N_{1-2} = 0$. La construimos, entonces, con estos datos. Cuando el peso está a la derecha del corte, su parte útil se sitúa a la derecha del primer nudo del cordón de carga, derecho con respecto a la sección. En nuestro caso tal nudo será el *1*.

Examinemos la posición del peso a la izquierda del corte y compongamos la condición de equilibrio de la parte derecha de la armadura

$$\sum M_{der} = -Bd - N_{1-2} \cdot 3d = 0, \quad \text{de donde } N_{1-2} = -\frac{B}{3} = -\frac{z}{l} \cdot \frac{1}{3}.$$

La recta izquierda también la construimos por dos puntos:

$$\text{Para } z = 0, \quad N_{1-2} = 0 \text{ y para } z = l, \quad N_{1-2} = -\frac{1}{3}.$$

La parte útil de la recta izquierda se ubica a la izquierda del corte, esto es, a la izquierda del primer nudo del cordón de carga, izquierdo con respecto a la sección. Este nudo será el *3*. No es difícil mostrar, que las rectas derecha e izquierda se cortarán debajo del punto de momento *k*.

Por la propiedad de transmisión nodal de la carga, la recta de enlace pasará entre las ordenadas más cercanas al corte, que limitan a las partes útiles de las rectas derecha (por debajo del nudo *1*) e izquierda (por debajo del *3*).

Al construir la línea de influencia de la fuerza N_{2-4}, empleando el mismo corte, es necesario tomar como punto de momento el punto *1* de intersección de las otras dos barras seccionadas *1-2* y *1-3*.

Hallándose el peso a la derecha del corte, la ecuación de equilibrio de la parte izquierda es

$$\sum M_1^{izq} = A \cdot 2d - N_{2-4}\rho_1 = 0, \quad \text{de donde } N_{2-4} = A\frac{2d}{\rho_1} = \frac{l-z}{l} \cdot \frac{2d}{\rho_1}$$

(recta derecha).

Hallándose el peso a la izquierda del corte, la ecuación de equilibrio de la parte derecha es

$$\sum M_1^{der} = -B \cdot 4d + N_{2-4}\rho_1 = 0, \text{ de donde}$$

$$N_{2-4} = B\frac{4d}{\rho_1} = \frac{z}{l} \cdot \frac{4d}{\rho_1}$$

(recta izquierda).

La parte útil de la recta derecha se sitúa a la derecha del nudo *1* y la de la recta izquierda, a la izquierda del nudo *3*. La recta de enlace, en este caso, coincide con la recta izquierda.

La condición de equilibrio de la parte izquierda de la armadura para la determinación de la recta *derecha* de la línea de influencia de la fuerza axil en cualquier barra se puede escribir en la forma general

$$\sum M_k^{izq} = Az_k \pm N^{izq}\rho_k = 0, \text{ de donde } N = \mp A\frac{z_k}{\rho_k} = \mp \frac{l-z}{l}\cdot\frac{z_k}{\rho_k},$$

donde: z_k es la coordenada del punto k contada desde el apoyo izquierdo hacia la derecha;

ρ_k es el brazo de la fuerza a determinar N en relación al punto k.

Para $z = 0$, $N = \mp\frac{z_k}{\rho_k}$ y para $z = l$, $N = 0$.

La recta derecha pasa a través del punto de la base por debajo del apoyo derecho, cortando por debajo del izquierdo a la ordenada $\mp\frac{z_k}{\rho_k}$. El signo superior se emplea cuando el momento de la fuerza axil izquierda positiva $N^{izq}\cdot\rho_k > 0$, o sea, cuando está dirigido en sentido de las agujas del reloj y, el inferior, cuando en sentido contrario.

Análogamente, la condición de equilibrio de la parte derecha de la armadura, para la determinación de la recta *izquierda* de la línea de influencia de la fuerza axil en *cualquier* barra, en la forma general, será

$$\sum M_k^{der} = -B(l - z_k) \pm N^{der}\rho_k = 0,$$

de donde

$$N = \pm B\frac{l-z_k}{\rho_k} = \pm\frac{z}{l}\cdot\frac{(l-z_k)}{\rho_k}.$$

Para $z = 0$, $N = 0$, y para $z = l$, $N = \pm\frac{l-z_k}{\rho_k}$.

La recta izquierda pasa a través del punto de la base debajo del apoyo izquierdo y corta por debajo del derecho a la ordenada $\pm\frac{l-z_k}{\rho_k}$. El signo superior se emplea cuando el momento de la fuerza axil positiva derecha $N_{der}\,\rho_k > 0$, es decir, está orientado en sentido de las agujas del reloj y, el inferior, cuando en sentido contrario.

Se puede mostrar que en todos los casos, *las rectas derecha e izquierda se cortan por debajo del punto de momento.*

En todos los casos, *la parte útil de la recta derecha se sitúa a la derecha del primer nudo del cordón de carga, derecho con respecto al corte y, la de la recta izquierda, a la izquierda del primer nudo del cordón de carga, izquierdo con respecto a la sección.*

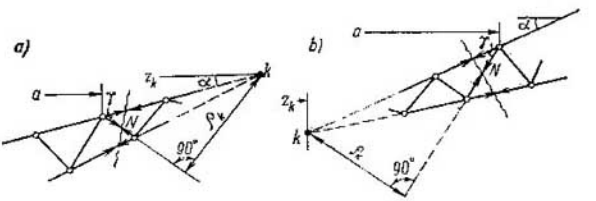
La recta de enlace se sitúa entre las partes útiles de las rectas derecha e izquierda.

Si en la sección las otras dos barras cortadas son paralelas y, por consiguiente, el punto de momento k se aleja al infinito, enton-

ces, conservando los razonamientos citados, se puede descubrir la indeterminación en la expresión $\mp \frac{z_k}{\rho_k}$ por medio del paso al límite, suponiendo al principio que el punto k está a distancia finita sobre una de las barras paralelas. Sin embargo, en este caso, es más simple escribir las ecuaciones de equilibrio en forma de la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje perpendicular a las barras paralelas.

Para las barras de los cordones de las armaduras con celosía simple, el brazo ρ_k y la relación $\frac{z_k}{\rho_k}$ se determinan bastante fácilmente. Con más dificultad se determinan los brazos para las barras de la celosía. Mostremos su determinación en la forma gene-

Fig. 121



ral (fig. 121). Pueden haber tres casos: cuando el punto de momento k está a la derecha del panel seccionado, a su izquierda y en el infinito.

El punto de momento k está a la derecha del corte (fig. 121, *a*).

$$\rho_k = \frac{z_k - a}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \gamma, \tag{7.15}$$

donde z_k es la coordenada del punto k, contada desde el apoyo izquierdo;

a, la coordenada del nudo del cordón superior, al que está aplicada la fuerza N;

α, el ángulo de inclinación de la barra seccionada del cordón superior, con respecto a la horizontal;

γ, el ángulo compuesto por la barra seccionada de la celosía (riostra o pendolón) con la barra seccionada del cordón superior.

El punto de momento k está situado a la izquierda del corte, para $z_k > 0$ (fig. 121, *b*).

$$\rho_k = \frac{a - z_k}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \gamma. \tag{7.16}$$

El punto de momento k está en el infinito, a la derecha.

De la expresión (7.15) tenemos que

$$\frac{z_k}{\rho_k} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \gamma} + \frac{a}{\rho_k}.$$

Si $z_k \to \infty$ y $\rho_k \to \infty$

$$\frac{z_k}{\rho_k} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \gamma}. \tag{7.17}$$

De todo lo dicho se deducen las siguientes reglas de construcción de líneas de influencia para una sección entre apoyos.

Se elige el punto de momento en la intersección de las otras dos barras de la armadura, seccionadas con el corte, y se escribe la ecuación de equilibrio en forma de la suma de momentos con respecto a este punto. Si las otras dos barras son paralelas, o sea, su punto de intersección se aleja al infinito, entonces, la condición de equilibrio se escribe en forma de la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje perpendicular a estas barras paralelas.

Cuando el peso se encuentra *a la derecha* de la sección, se examina el equilibrio de la parte *izquierda* de la armadura, lo que determina a *la recta derecha* de la l.i. y, con el peso *a la izquierda*, el equilibrio de la parte *derecha*, lo que nos da la *recta izquierda* de la l.i.

La recta derecha pasa por el punto de la base por debajo del apoyo derecho y corta por debajo del izquierdo la ordenada $\mp \frac{z_k}{\rho_k}$. El signo superior se emplea cuando el momento de la fuerza positiva N^{izq}, aplicada a la parte izquierda, está orientado con respecto al punto de momento, en sentido de las agujas del reloj y, el inferior, cuando está orientado en sentido opuesto. Si el punto de momento se aleja al infinito, entonces, convencionalmente, suponiéndolo a la derecha del corte, pasando al límite, obtenemos según (7.17)

$$\frac{z_k}{\rho_k} = \mp \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \gamma}, \tag{7.18}$$

donde: α es el ángulo de inclinación de las barras paralelas con respecto a la horizontal;

γ, el ángulo de inclinación de la tercera barra con respecto a las dos paralelas.

El signo superior se emplea cuando el momento de la fuerza positiva N^{izq}, con respecto al punto de momento situado *a la derecha* en el infinito, está dirigido en sentido de las agujas del reloj y, el inferior, cuando en sentido opuesto.

Este mismo valor $\mp \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \gamma}$ se desprende también de las condiciones de proyección de las fuerzas sobre el eje perpendicular a las barras paralelas.

La recta izquierda pasa por el punto de la base debajo del apoyo izquierdo y corta por debajo del derecho el segmento $\pm \frac{l - z_k}{\rho_k}$. El signo superior tiene lugar cuando el momento de la fuerza positiva N^{der}, aplicada a la parte derecha de la armadura está orientado, con respecto al punto de momento, en sentido de las agujas del

reloj y, el inferior, cuando en sentido opuesto. Si el punto de momento se aleja al infinito, entonces, $\pm \frac{l-z_k}{\rho_k} = \pm \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \gamma}$.

Las rectas derecha e izquierda se cortan siempre sobre la vertical que pasa por el punto de momento. Si éste está alejado al infinito, entonces, ellas son paralelas.

La parte útil de la recta derecha se sitúa a la derecha del primer nudo del cordón de carga, derecho con respecto al corte y, la recta izquierda, a la izquierda del primer nudo del cordón de carga, izquierdo con respecto al corte. La recta de enlace pasa entre las rectas izquierda y derecha.

Por cuanto la recta derecha determina con su posición a toda la línea de influencia, entonces, la construcción puede ser efectuada así:

1) por debajo del apoyo izquierdo se traza el segmento $\mp \frac{z_k}{\rho_k}$ y se une con el punto de la base por debajo del apoyo derecho (recta derecha);

2) sobre él se baja el punto de momento k y el punto obtenido se une con el punto de la base debajo del apoyo izquierdo (recta izquierda);

3) sobre la recta derecha se baja el primer nudo del cordón de carga, derecho con respecto al corte y, sobre la izquierda, el primero izquierdo y, por el punto obtenido se traza la recta de enlace. Esto es correcto también para el caso cuando el punto de momento está alejado al infinito y, por consiguiente, las rectas derecha e izquierda son paralelas.

2. CORTE DE VOLADIZO

Supongamos, como ejemplo, que se exige construir la l.i. de $N_{5\text{-}6}$ (fig. 120). Trazamos el corte de voladizo *2-2* a través de este elemento y de otros dos. Como punto de momentos tomamos el punto *7* en la intersección de las otras dos barras seccionadas. En el caso de corte de voladizo, independientemente de la posición del peso, se debe examinar el equilibrio del voladizo seccionado.

El peso está a la derecha del corte: $\Sigma M_7^{\text{izq}} = N_{5\text{-}6} h_1 = 0$, de donde $N_{5\text{-}6} = 0$. La recta derecha coincide con la base. Esto se cumple para todos los elementos del voladizo izquierdo. Análogamente, para todos los elementos del voladizo derecho, la recta izquierda también coincide con la base.

El peso está a la izquierda del corte: se recomienda determinar su ubicación por la coordenada contada desde el punto de momentos. La ecuación de equilibrio del voladizo seccionado es

$$\sum M_7^{\text{izq}} = -1x + N_{5\text{-}6} h_1 = 0, \text{ de donde } N_{5\text{-}6} = \frac{x}{h_1}$$

Construimos la recta izquierda por dos puntos: para $x = 0$, $N_{5\text{-}6} = 0$ y si $x = 2d$, $N_{5\text{-}6} = \frac{2d}{h_1}$.

Aquí también las rectas derecha e izquierda se intersecan por debajo del punto de momento 7. La parte útil de la recta derecha está ubicada a la derecha del primer nudo 6 del cordón de carga, derecho con respecto al corte y, la de la izquierda, a la izquierda del primer nudo del cordón 5 de carga, izquierdo con respecto al corte. La recta de enlace se ubica entre las rectas derecha e izquierda. En el caso dado coincide con la base. Si también en el caso de corte de voladizo, el punto de momento está alejado al infinito, entonces, es necesario escribir la ecuación de equilibrio en forma de la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje perpendicular a las barras paralelas.

El rasgo característico de la construcción de la línea de influencia para un corte de voladizo reside en que, independientemente de la posición del peso — a la derecha o a la izquierda de la sección —, *siempre se examina el equilibrio de la parte seccionada de la consola.* Como resultado de esto, *en el corte del voladizo izquierdo, la recta derecha coincide con la base, pero en el corte del derecho, la recta izquierda coincide con la base.* Por eso es que no hay necesidad de determinarlas cada vez. El punto de intersección de las rectas derecha e izquierda y los límites de sus partes útiles se determinan también como para el corte entre apoyos.

3. RECORTE DE NUDOS

En aquellos casos, cuando para determinar la fuerza axil, lo más fácil es utilizar el procedimiento de recorte de nudos, entonces, éste se emplea también para la construcción de las líneas de influencia. Así, al determinar la fuerza axil en la barra *1-2* (fig. 122), es

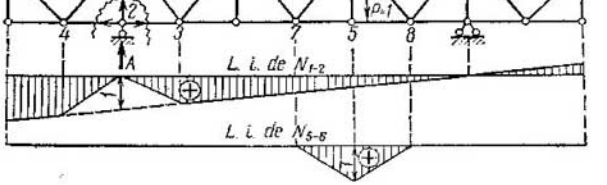


Fig. 122

imposible trazar un corte a través de ella y de otras dos barras. Sin embargo, recortando el nudo de apoyo, la fuerza axil se determina sencillamente. Al construir la línea de influencia por el procedimiento de recorte de nudos se investigan dos posiciones del peso: 1) el peso se halla fuera del nudo, cuando, con respecto al nudo recortado, si éste pertenece al cordón de carga, se encuentra a la derecha del primer nudo derecho y a la izquierda del primer nudo izquierdo y, para cualquier posición, si el nudo recortado no pertenece al cordón

de carga; 2) el peso se halla en el nudo, si el nudo pertenece al cordón de carga. Para la fuerza axil en la barra *1-2*:

1) el peso se halla fuera del nudo

$$\Sigma Y = A + N_{1\text{-}2} = 0,$$

de donde

$$N_{1\text{-}2} = -A = -\frac{l-z}{l}.$$

Por consiguiente, cuando el peso no se encuentra en el nudo, la l.i. de $N_{1\text{-}2}$ se diferencia de la l.i. de la reacción A en el signo. El peso se encuentra fuera del nudo cuando está a la derecha del nudo *3* y a la izquierda del *4*;

2) el peso se halla en el nudo

$$\sum Y = A - 1 + N_{1\text{-}2} = 0, \text{ de donde } N_{1\text{-}2} = -A + 1.$$

Dado que en tal posición $A = 1$, entonces, la fuerza axil $N_{1\text{-}2} = 0$.

Por la propiedad de la transmisión nodal, en los límites de los paneles derecho e izquierdo, con relación al nudo recortado, se sitúan dos rectas de enlace. Si el nudo recortado no pertenece al cordón de carga, entonces la línea de influencia, en toda su extensión, se construye por las expresiones establecidas para el peso que no se encuentra en el nudo. Análogamente, se construye la línea de influencia para la fuerza $N_{5\text{-}6}$. Cuando el peso se encuentra fuera del nudo, esto es, a la derecha del nudo *8* y a la izquierda del *7*, $N_{5\text{-}6} = 0$ y en el caso en que el peso esté en el nudo *5*, $N_{5\text{-}6} = 1$.

Las matrices de influencia de las fuerzas axiles en las barras de las armaduras se componen, por (5.29), en base a las instrucciones generales.

§ 59. CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO Y DE LAS FUERZAS AXILES EN LAS BARRAS DE LAS ARMADURAS, POR EL METODO DE SUSTITUCION DE VINCULOS. Este método se emplea al calcular armaduras complejas. En este caso, el cálculo de una armadura compleja se reduce al cálculo de una armadura simple, transformada de la dada mediante la sustitución de vínculos (barras). Al construir la línea de influencia, la armadura sustituyente se encuentra no sólo bajo la acción del peso $P = 1$, sino también, bajo la acción de las reacciones de los vínculos eliminados.

Como veremos más adelante, en la armadura dada, al sustituir uno de los vínculos, la línea de influencia de la fuerza axil buscada se determinará por la línea de influencia de la fuerza en la barra sustituyente de la armadura modificada. Al sustituir dos vínculos, las líneas de influencia buscadas serán determinadas por las de las fuerzas axiles en las dos barras sustituyentes. Y así sucesivamente. Por eso, la armadura sustituyente deberá ser elegida de tal manera, que las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras susti-

tuyentes se construyan de manera simple. Los siguientes razonamientos será cómodo efectuarlos sobre un ejemplo.

Sea que se exige construir las líneas de influencia de las reacciones de apoyo X_1 y X_2 de la armadura articulada expuesta en la fig. 123. Eliminamos estos vínculos de apoyo y en su lugar introducimos las barras *1-2* y *3-4* (fig. 123, *b*). Componemos las ecuaciones canónicas del método de sustitución de vínculos

$$r_{11}X_1 + r_{12}X_2 + R_{1P} = 0; \quad r_{21}X_1 + r_{22}X_2 + R_{2P} = 0,$$

de donde

$$X_1 = \frac{-r_{22}R_{1P} + r_{12}R_{2P}}{r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}}; \qquad X_2 = \frac{-r_{11}R_{2P} + r_{21}R_{1P}}{r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}}.$$

Aquí: R_{1P} es la línea de influencia de la reacción de la barra sustituyente *1-2* y R_{2P}, la de la reacción de la barra sustituyente *3-4*; r_{11} y r_{12} son las reacciones de la barra sustituyente *1-2* debidas a $X_1 = 1$ y a $X_2 = 1$ y, r_{21} y r_{22}, las de la barra sustituyente *3-4*, debidas a $X_1 = 1$ y a $X_2 = 1$.

Dado que en la armadura sustituyente, para $P = 1$, las fuerzas axiles en las barras *C-1*, *C-2*, *D-3* y *D-4* son iguales a cero, entonces, las l.i., de las fuerzas axiles en las barras *1-2* y *3-4* pueden ser fácilmente construidas, por cuanto la armadura sustituyente es una simple armadura articulada de viga sobre dos apoyos (fig. 123, *c*). Para la determinación de los coeficientes r_{11}, r_{12}, r_{21} y r_{22} es necesario examinar por separado la acción de las fuerzas $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$ sobre la armadura sustituyente (fig. 123, *d*) o examinar a ésta bajo la acción de ambas fuerzas expresadas en la forma general (fig. 123, *e*). En el último caso, los coeficientes r_{11}, r_{12}, r_{21} y r_{22} son iguales a los coeficientes de las fuerzas X_1 y X_2 en las expresiones de las fuerzas axiles N_{1-2} y N_{3-4}.

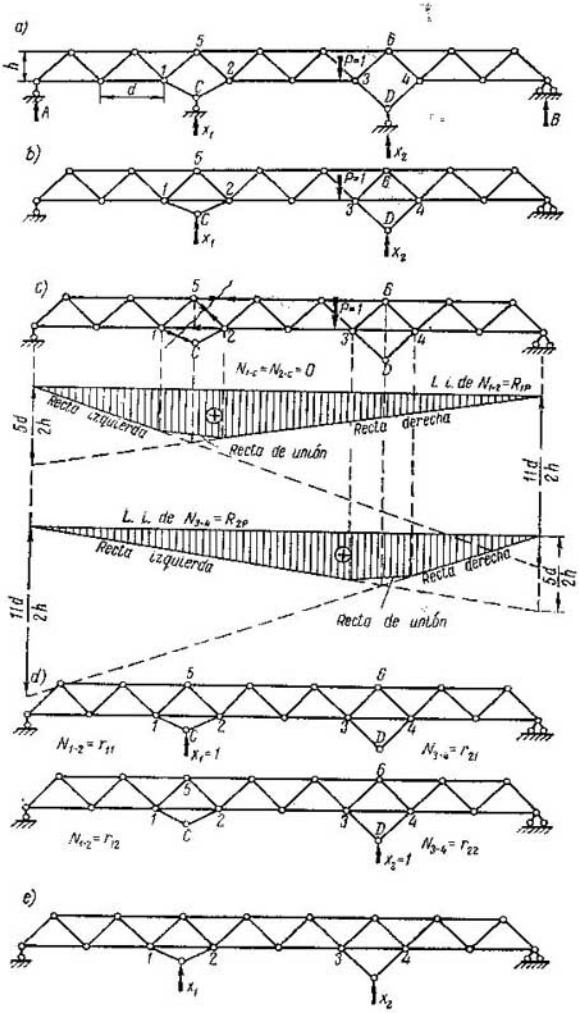
Luego, por las expresiones para las incógnitas básicas X_1 y X_2, sumando las l.i. encontradas en las barras sustituyentes, multiplicadas por los correspondientes coeficientes, obtenemos las ecuaciones de las l.i. buscadas de las reacciones de apoyo. La suma de las l.i. es necesario efectuarla por las partes rectas, teniendo en cuenta que la suma de líneas rectas dará siempre una línea recta.

Después de haber obtenido las l.i. de X_1 y X_2, la construcción de las l.i. de las reacciones de apoyo A y B y de las fuerzas axiles en las barras de la armadura, puede ser efectuada por la expresión (3.4). La línea de influencia de cualquier fuerza axil o reacción de apoyo, se obtiene como una combinación lineal de las l.i. de X_1 y X_2 y la l.i. de la fuerza axil buscada o de la reacción de apoyo en el sistema sustituyente por la expresión

$$\text{l.i. de } N_i = (\text{l.i. de } X_1)\,\overline{N}_{i1} + (\text{l.i. de } X_2)\,\overline{N}_{i2} + \text{l.i. de } N_i^0,$$

donde: l.i. de N_i es la línea de influencia de la fuerza axil o de la reacción de apoyo en la armadura dada; l.i. de X_1 y l.i. de X_2 son las líneas de influencia de las reacciones de los vínculos eliminados

Fig. 123



a)
b)
c)
d)
e)
h
d
P=1
A
B
C
D
x_1
x_2
$N_{1-c} = N_{2-c} = 0$
L. i. de $N_{1-2} = R_{1P}$
Recta izquierda
Recta derecha
Recta de unión
$\frac{5d}{2h}$
$\frac{11d}{2h}$
L. i. de $N_{3-4} = R_{2P}$
$N_{1-2} = r_{11}$
$N_{3-4} = r_{21}$
$N_{1-2} = r_{12}$
$N_{3-4} = r_{22}$
$x_1 = 1$
$x_2 = 1$

X_1 y X_2; $\overline{N}_{i1}$ y $\overline{N}_{i2}$, la fuerza axil o reacción de apoyo debida a $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$; l.i. de N_i^0, la línea de influencia de la fuerza axil o reacción de apoyo N_i en la armadura sustituyente.

Así, por ejemplo, la expresión de la línea de influencia de la reacción de apoyo A tiene el aspecto

$$\text{l.i. de } A = -\frac{2}{3}(\text{l.i. de } X_1) - \frac{1}{3}(\text{l.i. de } X_2) + \text{l.i. de } A^0,$$

donde

$$\text{l.i. de } A^0 = \frac{8d - z}{8d}.$$

§ 60. METODO CINEMATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO Y DE LAS FUERZAS AXILES DE LAS BARRAS DE LAS ARMADURAS. La construcción de las líneas de influencia por el método cinemático, en correspondencia con la expresión (5.7), o sea,

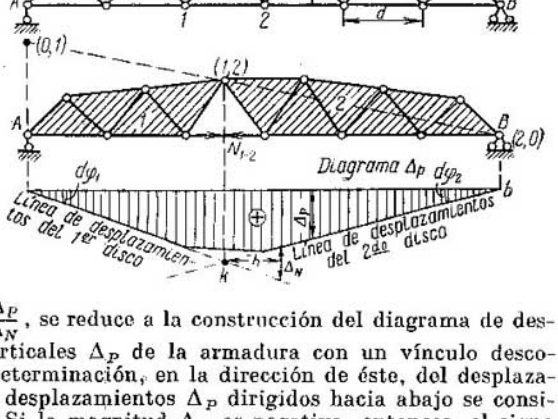


Fig. 124

l.i. de $N = -\frac{\Delta_P}{\Delta_N}$, se reduce a la construcción del diagrama de desplazamientos verticales Δ_P de la armadura con un vínculo desconectado y a la determinación, en la dirección de éste, del desplazamiento Δ_N. Los desplazamientos Δ_P dirigidos hacia abajo se consideran positivos. Si la magnitud Δ_N es negativa, entonces, el signo de la línea de influencia coincide con el del diagrama de desplazamientos verticales Δ_P y a la inversa.

El modo más simple de construir el diagrama de desplazamientos verticales posibles Δ_P, es por medio de los centros instantáneos de rotación de discos sueltos que contienen la línea de carga, en el sistema con un vínculo eliminado. De este diagrama se determina también la magnitud Δ_N. Examinemos la utilización del procedimiento en los ejemplos. Comencemos con la construcción de la línea de influencia de la fuerza axil en la barra *1-2* de una armadura simple (fig. 124), para la circulación del peso por abajo. Eliminamos esta

barra, con lo que transformamos a la armadura en un sistema monovariante, compuesto por dos discos.

El centro instantáneo de rotación del segundo disco, con respecto a la tierra, coincide con el apoyo fijo y, el del primero se halla en la dirección del apoyo de dilatación. El centro instantáneo relativo de los discos (*1*, *2*) está en la articulación *3* que une a ambos.

Hallaremos el centro instantáneo (*0*, *1*) por el teorema de los tres centros instantáneos o, de manera más simple, sustituyendo mentalmente el segundo disco por una barra. Entonces, el primer disco estará unido a la tierra por dos barras: por el apoyo movible y por la barra imaginaria B — (*1-2*) en el lugar del segundo disco. El centro instantáneo (*0*, *1*) se encuentra precisamente en la intersección de estas barras. Para la construcción del diagrama de los desplazamientos verticales Δ_P le imprimimos al primer disco un giro de ángulo $d\varphi_1$ (la recta *ak*). La línea de traslación *kb* del segundo disco se cruza con la del primero por debajo del centro instantáneo (*1*, *2*) en el punto *k* y pasa por el punto de la base por debajo del centro instantáneo (*0*, *2*). Luego, sobre la línea de desplazamiento del primer disco, bajamos el nudo *1* y, sobre la del segundo, el *2*. Las ordenadas del diagrama son positivas, dado que las traslaciones están dirigidas hacia abajo, por la dirección de la fuerza $P = 1$. El diagrama de desplazamientos Δ_P está construido.

Para obtener la magnitud Δ_N y la escala de la línea de influencia es necesario, por la norma general, en el diagrama Δ_P, trazar horizontalmente desde el punto de intersección *k* de las líneas de traslaciones del primero y segundo discos, hacia cualquier lado, la longitud de la perpendicular bajada desde el centro instantáneo (*1*, *2*) en la dirección de la fuerza buscada y, en este lugar, medir la ordenada vertical entre las líneas de traslaciones del primero y segundo discos. Esta ordenada es precisamente la unidad de escala de la línea de influencia. El signo de Δ_N se establece de la siguiente manera. Supongamos que nosotros investigamos el desplazamiento del primer disco con respecto al segundo. Por el diagrama de traslaciones Δ_P se ve que el primero, en relación al segundo, gira en sentido de las agujas del reloj. Con tal giro, el punto *1* del primer disco se traslada a la izquierda, es decir, hacia el lado contrario de la fuerza N, lo que significa que la magnitud Δ_N es negativa. Para un valor negativo de Δ_N, el signo de la línea de influencia coincide con el del diagrama de desplazamientos.

Para la construcción de la línea de influencia de la fuerza axil en el elemento *1-3* de esta misma armadura, eliminamos este elemento y lo sustituimos por las fuerzas buscadas (fig. 125). También aquí el sistema reformado está compuesto por dos discos. Los centros instantáneos (*1*, *2*) y (*0*, *2*) se encuentran simplemente y no exigen explicaciones especiales. El centro instantáneo (*0*, *1*) debe encontrarse en la línea de la barra del apoyo movible y según el teorema de los tres centros instantáneos en la recta (*1*, *2*) — (*0*, *2*). Por consiguiente, este centro instantáneo se halla en la articulación supe-

rior del apoyo movible. El diagrama de desplazamientos Δ_P lo construimos dándonos la línea de desplazamientos verticales del primer disco bajo el ángulo $d\varphi_1$. Esta recta ac pasará a través del punto de la base por debajo del centro instantáneo $(0, 1)$. La línea de desplazamientos bd del segundo disco se intersecará con la del primero por debajo del centro instantáneo mutuo $(1, 2)$ y pasará por el punto de la base por debajo del centro instantáneo $(0, 2)$. Para obtener la línea de desplazamientos del cordón de carga trasladamos el nudo *1* a la línea de desplazamientos del primer disco (punto *c*) y el *2* a la del segundo (punto *d*).

El diagrama de desplazamientos Δ_P en este caso, es binario. Para determinar por este diagrama la magnitud Δ_N trazamos, por

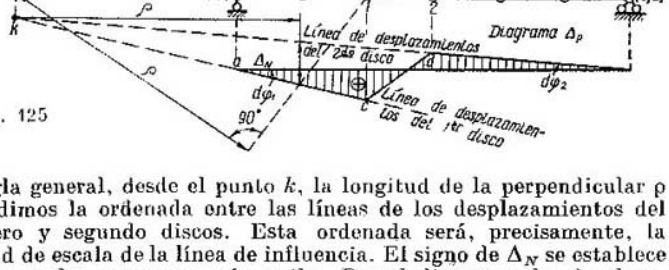


Fig. 125

la regla general, desde el punto k, la longitud de la perpendicular ρ y medimos la ordenada entre las líneas de los desplazamientos del primero y segundo discos. Esta ordenada será, precisamente, la unidad de escala de la línea de influencia. El signo de Δ_N se establece por las reglas expuestas más arriba. Por el diagrama de desplazamientos Δ_P se ve que el primer disco gira con respecto al segundo en sentido de las agujas del reloj. Esto significa, que, de suponer a este último fijo e imprimir al primero una rotación en sentido de las agujas del reloj alrededor del centro instantáneo $(1, 2)$, entonces, el punto *1* se alejará del *3* y el desplazamiento Δ_N será negativo. Los signos de la línea de influencia coinciden con los del diagrama de desplazamientos Δ_P.

Mostremos el empleo del procedimiento de los polos sobre un ejemplo más complejo. En la fig. 126 está representada una armadura con la barra $c—d$ eliminada, la línea de influencia de cuyo esfuerzo se exige determinar. En este caso, tenemos cuatro discos. Los polos $(1, 2)$ $(0, 2)$ $(0, 3)$ $(2, 3)$ $(3, 4)$ y $(0, 4)$ no exigen explicaciones. El polo $(0, 1)$ lo hallamos en la intersección de la línea de la barra del apoyo movible y la línea $B—e$, si sustituimos mentalmente el disco *2* por la barra $B—e$. El $(1, 3)$ lo hallamos en el cruce de las líneas $a—b$ y $B—e$, dado que los discos *1* y *3* están unidos entre sí mediante la barra $a—b$ y el disco *2*, equivalente a la barra imaginaria $B—e$. Todos los polos han sido hallados, construimos el diagrama de desplazamientos verticales. Trazamos la línea de desplazamiento del primer disco bajo un ángulo arbitrario $d\varphi_1$ (la línea a_1k). La línea

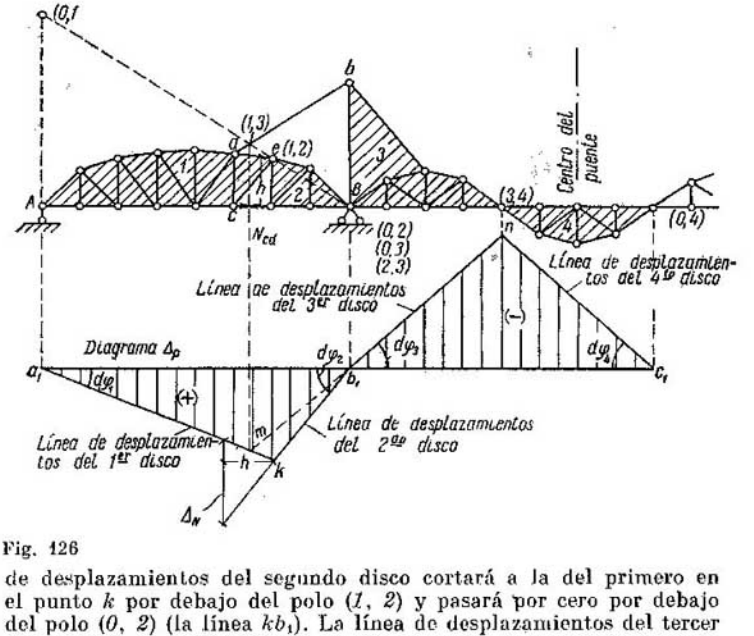


Fig. 126

de desplazamientos del segundo disco cortará a la del primero en el punto k por debajo del polo (*1*, *2*) y pasará por cero por debajo del polo (*0*, *2*) (la línea kb_1). La línea de desplazamientos del tercer disco intersecará a la del primero en el punto m por debajo del polo (*1*, *3*) y a la del segundo en el punto b_1, por debajo del polo (*2*, *3*), pasando también por cero por debajo del polo (*0*, *3*). La línea de desplazamientos del cuarto disco cruzará a la del tercero en el punto n, por debajo del polo (*3*, *4*) y pasará por cero por debajo del polo (*0*, *4*) en el punto c_1. Así será construido el diagrama de desplazamientos Δ_P. Por él será determinada la magnitud de Δ_N. Para esto es necesario, desde el punto de intersección de las líneas de desplazamientos del primero y segundo discos, trazar horizontalmente, hacia cualquier lado, la perpendicular h, bajada desde el polo (*1*, *2*) a la dirección de las fuerzas N_{cd} y medir en el diagrama de desplazamientos Δ_P la ordenada Δ_N entre las líneas de desplazamientos del primero y segundo discos. En adelante, esta magnitud se debe tomar como unidad, en calidad de escala de la línea de influencia de N_{cd} en el diagrama de desplazamientos Δ_P. Establecemos nuevamente el signo de Δ_N por medio de los siguientes razonamientos: en el diagrama Δ_P, el primer disco, en relación al segundo, gira en sentido de las agujas del reloj. Por eso, si en el diseño de la armadura, mentalmente, tomamos al segundo disco como fijo y al primero le imprimimos rotación en sentido de las agujas del reloj alrededor del polo (*1*, *2*) entonces, el nudo c se trasladará hacia

la izquierda alejándose del d. El desplazamiento será contrario a la dirección de la fuerza N_{cd} aplicada al primer disco, lo que significa que Δ_N es negativo. La línea de influencia para $\Delta_N < 0$, tiene los mismos signos que el diagrama de desplazamientos Δ_P.

El método de los centros instantáneos, al construir las líneas de influencia, es cómodo cuando la armadura con un vínculo desconectado contiene poca cantidad de discos, cuyos centros instantáneos recíprocos y con respecto a la tierra, se determinan fácilmente.

§ 61. NOCION SOBRE ARMADURAS ARRIOSTRADAS. Se llaman armaduras *arriostradas* a las que tienen celosías pendolares. Se forman de las armaduras con celosía simple, en las

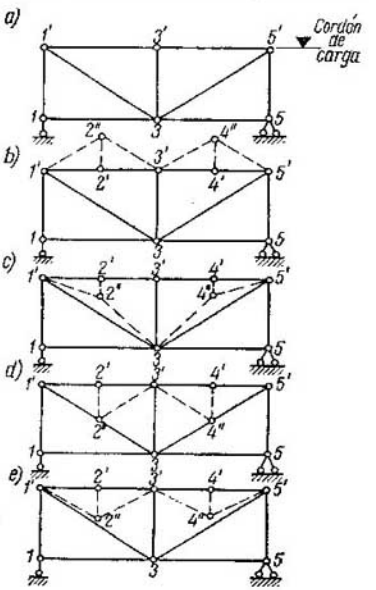


Fig. 127

cuales todos o algunos paneles del cordón de carga o carguero se subdividen en partes, por medio de la introducción de barras complementarias que trabajan bajo cargas locales.

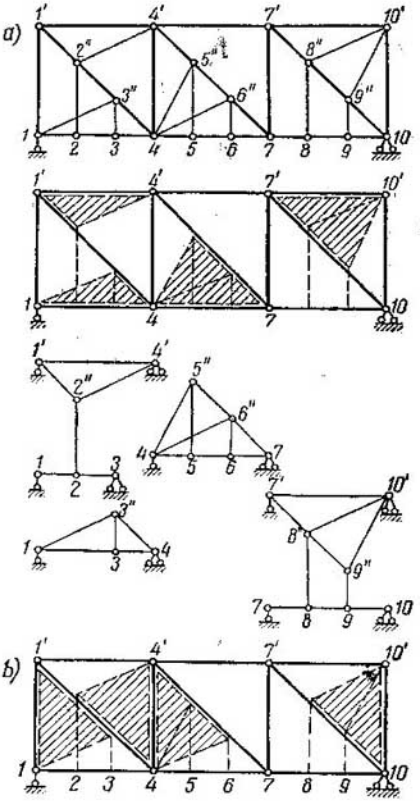
Las armaduras con celosía simple sin barras complementarias, que componen la parte básica de las pendolares, se llaman *básicas*.

La subdivisión del cordón de carga en partes puede ser efectuada de diferentes maneras, por ejemplo, transformando a una barra cordonal (menos frecuentemente a una diagonal) de la armadura básica en un elemento complejo (fig. 127, *b*, *c*) o formando nudos intermedios sobre las riostras de la armadura básica, por medio de diagonales pendolares complementarias (fig. 127, *d*).

A los elementos complejos con un cordón recto, en los cuales todas las barras, excepto las del cordón, trabajan *sólo* bajo carga local, los llamaremos *elementos arriostrados o barras auxiliares*.

Los nudos intermedios de las barras auxiliares del cordón de carga dividen al panel de este cordón de la armadura básica en partes, pero en presencia de nudos intermedios de otras barras auxiliares y nudos sobre las diagonales de la armadura básica, esto

Fig. 128



puede ser hecho por medio de montantes o pendolones complementarios.

A la formación de nudos intermedios sobre las riostras de la celosía triangular o enrriostrada de la armadura básica (fig. 127, *d*) se la puede considerar convencionalmente, como la unión constructiva de las barras lindantes de la barra auxiliar y la armadura básica en una barra (fig. 127, *e*) y considerar que esta última es un elemento de cordón, complejo, una barra auxiliar, sólo que en forma disimulada (fig. 127, *d*). Esto da la posibilidad, durante el cálculo, de distinguir la barra auxiliar disimulada, uno de cuyos cordones está formado con la barra cordonal de la armadura básica y, el otro, con la diagonal extrema arriostrada (si ellas son varias) y con la barra que coincide con la diagonal de la armadura básica, en la parte desde la barra cordonal hasta dicha diagonal extrema. Por eso, es muy importante ser capaz, durante el cálculo, de diferenciar correctamente en la armadura a las barras auxiliares disimuladas. En calidad de ejemplo en la fig. 128, *a* se las señala con punteado y sombreado. Señalemos que, en el caso dado, hubieramos podido examinar, en calidad de elementos complejos, no al cordón, sino a los montantes (fig. 128, *b*), pero esto es menos cómodo para el cálculo.

Si sobre el cordón de carga hay nudos complementarios (intermedios), entonces, sobre éstos se pueden colocar las vigas transversales complementarias de la parte transitable de los puentes, dis-

minuyendo las luces de las vigas longitudinales que se apoyan en ellos, y hacer la parte transitable mucho más ligera.

A la división del panel de la armadura básica, se acude en las armaduras de gran altura que cubren grandes luces, por cuanto es constructivamente cómodo y teóricamente racional, que las riostras de la armadura básica formen con la horizontal un ángulo próximo a los 45°.

Las barras auxiliares evidentes y disimuladas que representan elementos complejos del cordón de carga se llaman de carga o *cargueras* y las que representan elementos complejos del otro cordón, *no cargueras*. Las barras auxiliares diagonales de la armadura básica

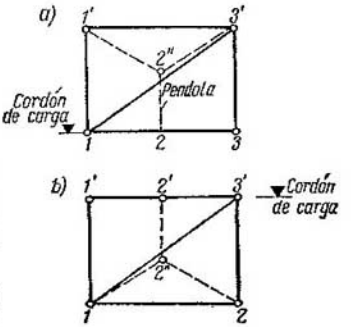


Fig. 129

no son de interés práctico y, en adelante, no serán examinadas.

La carga se transmite desde los nudos complementarios del cordón de carga a los nudos básicos del mismo cordón, por medio de las barras auxiliares de carga (fig. 127, *b*, *d*) y sobre los nudos básicos del otro cordón carguero, por medio de las barras auxiliares que no son de carga (fig. 129; *a* — por las barras superiores — de los nudos complementarios del cordón inferior sobre los nudos básicos del cordón superior; *b* — por las barras inferiores — de los nudos complementarios del cordón superior sobre los nudos básicos del cordón inferior).

La transmisión, por las barras auxiliares no cargueras, de las presiones de la carga rodante, situada sobre los nudos complementarios del cordón de carga, a los nudos básicos del otro cordón, permite, al construir las líneas de influencia de las fuerzas longitudinales de las barras de la armadura básica, considerar, convencionalmente, que el peso se desplaza por el cordón no carguero, cuando está situado sobre estos nudos complementarios del cordón carguero.

Mostremos que las barras complementarias que transforman la barra recta de la armadura básica en barra auxiliar, las diagonales arriostradas, así como los montantes y péndolas complementarios, que transmiten la presión de los nudos complementarios del cordón carguero sobre la barra auxiliar o sobre los nudos intermedios de las riostras básicas, trabajan sólo bajo carga local. Esto se desprende, por ejemplo, del equilibrio del nudo recortado *2'* (véase la fig. 127), en el cual la barra *2'-2"* y las *1-2"* y *2"-3'*, trabajarán sólo cuando el nudo *2'* esté cargado.

Las barras de la armadura básica trabajan bajo la carga general, lo cual no exige demostraciones.

El cordón recto de la barra auxiliar evidentemente oculta, coincidente con la barra cordonal de la armadura básica, trabaja tanto a la carga local como a la carga total de la armadura.

§ 62. METODO ESTATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS FUERZAS AXILES EN LAS BARRAS DE ARMADURAS ARRIOSTRADAS. Si en una armadura arriostrada se puede trazar un corte por la barra, la línea de influencia de cuya fuerza axil se determina, y aún a través de sólo otras

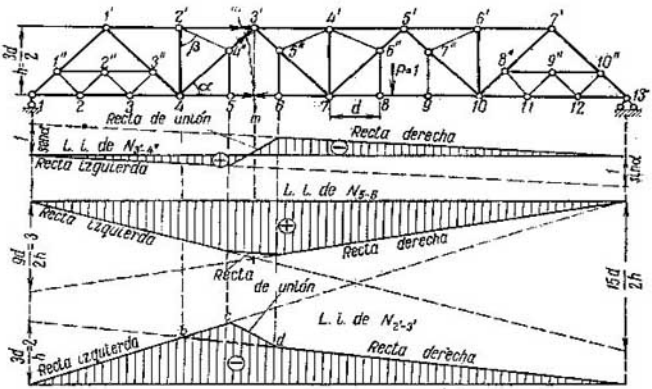


Fig. 130

dos barras, entonces, la línea de influencia se construye por las reglas expuestas anteriormente, teniendo en cuenta los nudos intermedios del cordón carguero. Así, por ejemplo, pueden ser construidas las l.i. de las fuerzas axiles de las barras $2'$-$3'$, $3'$-$4''$ y 5-6 (fig. 130), en las cuales, las partes útiles de las rectas derechas se sitúan a la derecha del nudo 6 y, las de las rectas izquierdas, a la izquierda del nudo 5. Las líneas de influencia de N_{4-5} y N_{6-7} son idénticas a las de N_{5-6}, dado que

$$N_{4-5} = N_{5-6} = N_{6-7}.$$

Examinemos dos variantes de construcción de las líneas de influencia en otros casos.

Primera variante. La armadura se examina como armadura con elementos complejos y en ella se emplean las reglas de cálculo de semejantes armaduras. Para esto, la armadura arriostrada se divide en armadura básica, con barras rectas entre los nudos básicos, y en barras auxiliares en forma de armaduras sobre dos apoyos que dan reacciones verticales en el caso de peso vertical. Los nudos básicos del cordón de la armadura sirven como apoyos de la barra auxiliar (véase la fig. 128, *a*). A las barras auxiliares no cargueras es cómodo

agregar aún montantes o pendolones[1]) verticales complementarios, que transmitirán sobre ellas la presión de los nudos del cordón carguero, y barras de este último, lindantes con los montantes o pendolones en forma de cadena articulada con dos apoyos por sus extremos, que dan reacciones verticales bajo peso vertical (v. fig. 128, *a*). Después de tal división tendremos barras de cuatro clases: 1) montantes y pendolones complementarios; 2) barras que entran sólo en la barra auxiliar; 3) barras que entran sólo en la armadura básica y 4) barras que entran en la armadura básica y en la barra auxiliar.

La construción de las líneas de influencia depende de la categoría a que se refiere la barra dada. Expongamos algunas indicaciones que se desprenden del cálculo de las armaduras con elementos complejos y las propiedades de las barras auxiliares diferenciadas en el caso de carga vertical.

Las líneas de influencia de las fuerzas axiles de los montantes y los pendolones complementarios, se construyen por el procedimiento de recorte de nudos complementarios del cordón de carga.

Las líneas de influencia de las fuerzas axiles de las barras que entran sólo en la barra auxiliar se construyen como en la armadura simple, sobre dos apoyos, teniendo en cuenta, para las barras auxiliares no cargueras, las condiciones de transmisión de las presiones del peso $P = 1$ sobre los montantes o pendolones verticales.

Las líneas de influencia de las fuerzas axiles de las barras que entran sólo en la composición de la armadura básica, se construyen como en esta última, pero tomando en consideración, obligatoriamente, la ubicación de las barras auxiliares y su transmisión de las presiones de los nudos complementarios del cordón de carga, sobre los nudos de la armadura básica.

Si todas las barras auxiliares son cargueras o si, para circulación por arriba y por abajo, las líneas de influencia de las fuerzas axiles de las barras de la armadura básica son idénticas, entonces, las líneas de influencia se construyen como para las barras que entran sólo en la composición de la armadura básica. Pero si todas o algunas barras auxiliares no son cargueras y las líneas de influencia de las fuerzas axiles de las barras de la armadura básica dependen de si la circulación es por arriba o por abajo, entonces, las líneas de influencia de estas fuerzas axiles en la armadura básica se construyen, al principio, bajo dos suposiciones: de que la circulación sea por arriba y de que la circulación sea por abajo. Luego, a lo largo de los paneles divididos de los cordones superior e inferior de la armadura básica, donde las líneas de influencia son diferentes en los casos de circulación por abajo y por arriba, se coloca el peso $P = 1$ sobre diferentes nudos del cordón carguero y se determina hacia adónde se transmite su presión, a los nudos cordonales superiores de la armadura básica o a los inferiores. Por debajo del nudo dado, la ordenada

[1]) Los casos de montantes y pendolones inclinados complementarios, aquí no se examinan.

de la línea de influencia buscada es igual a la ordenada de la línea de influencia en el caso de circulación por el cordón, por los nudos del cual se transmite la presión del peso ubicado en este nudo. En particular, por debajo de los nudos básicos del cordón carguero, las ordenadas de las líneas de influencia, construidas para circulación por este cordón, son correctas.

Las líneas de influencia de las fuerzas axiles de las barras que entran en la composición de la armadura básica y en la de la barra auxiliar, se obtienen sumando las líneas de influencia de estas fuerzas construidas por separado en la armadura básica y en la barra auxiliar. En este caso, es necesario tener en cuenta, que las líneas de influencia de las fuerzas axiles de la armadura básica, diferentes para la circulación por arriba y por abajo, deberán ser construidas teniendo en cuenta la transmisión de las presiones por las barras auxiliares no de carga, de los nudos complementarios del cordón de carga a los nudos del otro cordón, como esto fue expuesto anteriormente. Examinemos algunos ejemplos.

Construyamos las líneas de influencia de las fuerzas axiles en varias barras de la armadura expuesta en la fig. 130. Primero, la de la fuerza axil de la barra *3'-4"*, trazando un corte a través de las tres barras *2'-3'*, *3'-4"* y *5-6*.

Hallándose el peso a la derecha del corte, del equilibrio de la parte izquierda tenemos que:

$$\sum Y^{\text{izq}} = A + N_{3'-4''} \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

$$\text{de donde } N_{3'-4''} = -\frac{A}{\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{l-z}{l} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Hallándose a la izquierda, del equilibrio de la parte derecha tenemos que:

$$\sum Y^{\text{der}} = B - N_{3'-4''} \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

$$\text{de donde } N_{3'-4''} = \frac{B}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{z}{l} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Las rectas izquierda y derecha fueron construidas por dos puntos. La parte útil de la recta derecha se encuentra a la derecha del primer nudo derecho, con respecto al corte por el cordón de carga, esto es, más a la derecha del nudo *6* y, la de la izquierda, a la izquierda del *5*. Análogamente, por la misma sección se construyen las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras *2'-3'* y *5-6*, expuestas en la fig. 130.

Ahora examinemos la construcción de las líneas de influencia, descomponiendo en partes la misma armadura que se muestra en la fig. 131. Al principio, examinamos la barra auxiliar no de carga *2'-3'-4"* con la péndola complementaria *5-4"* y con los nudos complementarios *4-5-6* del cordón de carga, la carga entre los cuales ejerce presión sobre la péndola *5-4"* (fig. 132).

La línea de influencia para la barra *4"-5* se obtiene del recorte del nudo *5*. Para el peso fuera del nudo $N_{4''-5} = 0$ y, hallándose en él, $N_{4''-5} = 1$.

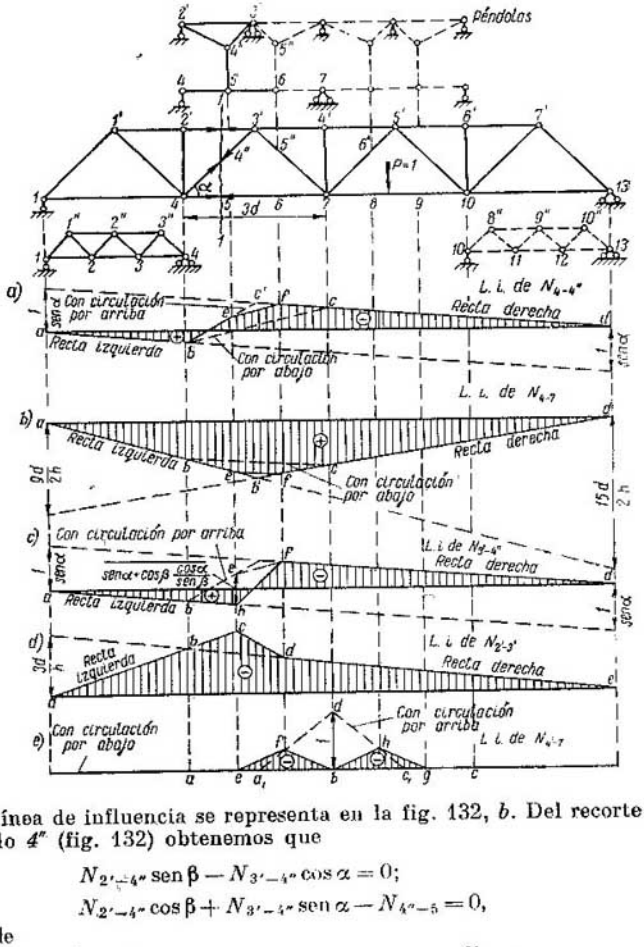


Fig. 131

La línea de influencia se representa en la fig. 132, *b*. Del recorte del nudo *4''* (fig. 132) obtenemos que

$$N_{2'-4''} \operatorname{sen}\beta - N_{3'-4''} \cos\alpha = 0;$$
$$N_{2'-4''} \cos\beta + N_{3'-4''} \operatorname{sen}\alpha - N_{4''-5} = 0,$$

de donde

$$N_{2'-4''} = \frac{N_{4''-5}}{\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}}; \qquad N_{3'-4''} = \frac{N_{4''-5}}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}}.$$

De estas expresiones se deduce que las l.i. de $N_{2'-4''}$ y $N_{3'-4''}$ pueden ser obtenidas a través de la de $N_{4''-5}$ (fig. 132, *c*, *d*).

Del equilibrio del nudo recortado 2′ obtenemos que

$$\sum X = N_{2'-3'} + N_{2'-4''} \operatorname{sen}\beta = 0, \text{ de donde } N_{2'-3'} = -\frac{N_{4''-5}}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}.$$

Del mismo modo, la l.i. de $N_{2'-3'}$ puede ser obtenida por medio de la de $N_{4'-5}$.

De esta manera se examinaron todos los elementos de la barra auxiliar.

Examinemos ahora algunas barras que entran sólo en la composición de la armadura básica, por ejemplo, la *4-7* y el trozo *4-4″* de la *4-3′*. Las líneas de influencia de las fuerzas axiles en estas barras se construyen utilizando el corte *1-1* (véase la fig. 131). Ellas son diferentes para la circulación por arriba y por abajo. La de $N_{3'-4}$, para la circulación por abajo, es la *abcd* y, por arriba, la *abc′d* (fig. 131, *a*). Para obtener de ellas la l.i. de $N_{4-4''}$, es necesario tener en cuenta la transmisión de las presiones por las barras auxiliares sobre los nudos del cordón no de carga. La presión del peso ubicado en los nudos *5* y *6*, por las barras auxiliares *2′4″3′* y *3′4′5″* se transmite sobre los nudos del cordón superior y, por eso, bajo estos nudos es correcta la línea de influencia con circulación por arriba.

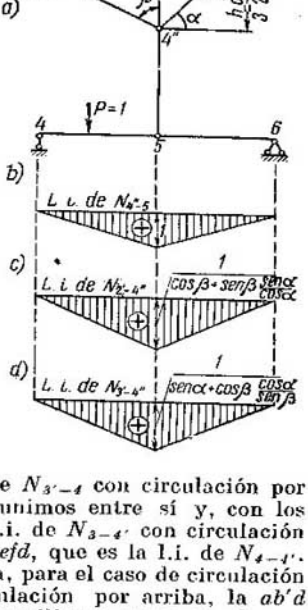


Fig. 132

Llevando estos nudos sobre la l.i. de $N_{3'-4}$ con circulación por arriba, obtenemos los puntos *e* y *f*, los unimos entre sí y, con los de debajo de los nudos *4* y *7* sobre la l.i. de $N_{3-4'}$ con circulación por abajo. De este modo, obtenemos *abefd*, que es la l.i. de $N_{4-4'}$.

La l.i. de N_{4-7} en la armadura básica, para el caso de circulación por abajo, es la *abcd*, y para la circulación por arriba, la *ab′d* (fig. 131, *b*). El cálculo de las barras auxiliares, como en el caso anterior, se reduce a que ellas mismas, para la posición del peso sobre los nudos *5* y *6*, transmitirán su presión sobre los nudos del cordón superior, lo que significa, que la l.i. para circulación por arriba es correcta. Por eso, llevando los nudos *5* y *6* sobre la l.i. de N_{4-7} con circulación por arriba, obtenemos los puntos *e* y *f*, a los que también unimos entre sí. La l.i. definitiva de N_{4-7} (la *aefd*)

está, en el esquema, sombreada. Esta es igual a la obtenida anteriormente por otra vía, precisamente, más simple (fig. 130).

La l.i. de $N_{3'-4''}$ se obtiene componiendo la l.i. de $N_{3'-4}$ en la armadura básica, con una corrección que tiene en cuenta la transmisión de las presiones por las barras auxiliares (*abefd*) y la l.i. de $N_{3'-4''}$ en la barra auxiliar, dado que este elemento entra en la composición de la armadura básica y de la barra auxiliar. La l.i. de $N_{3'-4''}$ se muestra en la fig. 131, *d*. Por medio de la construcción cinemática de esta línea de influencia podemos demostrar que el punto *h* está sobre la recta *ab*. Como se ve en la fig. 130, con la eliminación de la barra *4''-3'* el panel *4-5* pasará a pertenecer al disco izquierdo y esto significa que también estará sobre la línea de desplazamientos de este disco. La línea de influencia trazada coincide con la l.i. trazada anteriormente por un procedimiento más simple para la misma fuerza (fig. 130). De tal modo, *sólo se debe acudir a la división de la armadura, cuando no se pueda efectuar un corte a través de tres barras* como, por ejemplo, al construir las l.i. de $N_{4-4''}$, de N_{2-3} y de otras. Al dividir la armadura en partes, la l.i. de $N_{2'-3'}$ deberá ser obtenida como una suma de las líneas de influencia de $N_{2'-3'}$ en la armadura básica y en la barra auxiliar (véase la fig. 131, *d*). En la fig. 130 la l.i. de $N_{2'-3'}$, la línea de influencia en la barra auxiliar es el triángulo *bcd*, unido a la línea de influencia en la armadura básica *abe* (fig. 131, *d*).

Construyamos además la l.i. de $N_{4'-7}$. En la armadura básica, esta línea de influencia depende de que la circulación sea por arriba o por abajo. Cuando la circulación es por abajo, la fuerza axil en el montante es igual a cero y su línea de influencia coincide con la base (la línea *abc* en la fig. 131, *e*). Cuando la circulación es por arriba, la ordenada de la l.i. por debajo del nudo *4'*, según resulta del recorte de este nudo, es igual a menos uno y, debajo de los nudos *3'* y *5'*, a cero (la línea a_1dc_1). Cuando el peso está ubicado en los nudos *5* y *9*, $N_{4'-7} = 0$, dado que debajo de estos nudos, para la circulación por abajo y por arriba, ambas l.i. poseen las coordenadas iguales a cero. Cuando el peso está en los nudos *8* y *6* se transmite a los nudos del cordón superior, lo cual significa que la l.i. con circulación por arriba es correcta. Cuando el peso se encuentra en el nudo *7*, la l.i. es nuevamente correcta, con circulación por abajo. Llevando los nudos sobre las correspondientes líneas de influencia previamente construidas para diferentes circulaciones, obtenemos la l.i. definitiva de $N_{4'-7}$ (la línea *efbhg* en la fig. 131).

Examinemos la construcción de algunas líneas de influencia de fuerzas axiles en las barras de una armadura (fig. 133). Las barras de la armadura básica están representadas con líneas gruesas. Comenzaremos con la construcción de la línea de influencia de la fuerza axil en el montante *7-7'*. En la armadura básica, esta línea de influencia depende de la circulación por arriba y por abajo. La construimos por el procedimiento corriente de los dos supuestos: de que la circulación sea por arriba y de que la circulación sea por abajo. Para esto

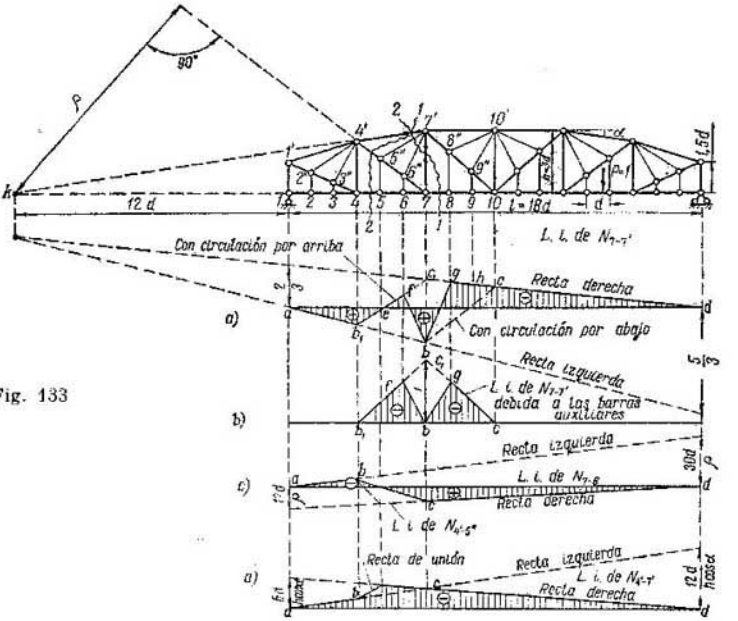


Fig. 133

es necesario trazar el corte *1-1* y componer la ecuación de equilibrio en forma de momento de fuerzas con respecto al punto *k*. Cuando la circulación es por abajo, la l.i. será la *abcd*, pero cuando es por arriba, la ab_1c_1d. Las corregimos tomando en cuenta la transmisión de las presiones sobre los nudos del cordón superior por las barras auxiliares *4'5"6"7'* y *7'8"9"10'*, cuando el peso se sitúa sobre los nudos intermedios *5*, *6*, *8* y *9*. Es necesario llevar estos nudos a la l.i. con circulación por arriba; a los restantes *4*, *7* y *10*, sobre la l.i. con circulación por abajo. La l.i. definitiva de $N_{7-7'}$, es el polígono ab_1fbgd (fig. 133, *a*). La l.i. de $N_{7-7'}$ podría ser construida adicionando la l.i. básica con circulación por abajo (la *abcd*) y la l.i. de las presiones verticales sobre el nudo *7* debidas a las barras auxiliares que se apoyan sobre este nudo (fig. 133, *b*) y que origina en el montante una fuerza axil negativa. Por fin, esta misma línea de influencia puede ser construida por medio de la l.i. de $N_{6''-7}$, recortando el nudo *7* y examinando el peso en el nudo y fuera de él.

La l.i. $N_{6''-7}$ de la fuerza axil de la parte de la riostra que entra sólo en la composición de la armadura básica, dado que es idéntica

para circulación por arriba y por abajo, puede ser construida para la armadura básica sin ninguna corrección, empleando el corte *2-2*. La recta derecha es útil hasta el nudo *7* y la izquierda hasta el *4* (fig. 133, *c*). Por la sección *2-2* se pueden construir directamente sin tener en cuenta las barras auxiliares, las líneas de influencia de $N_{4-5} = N_{5-6} = N_{6-7}$, de $N_{4'-5''}$ y de $N_{4'-7''}$.

En la fig. 133, *d*, se muestra la l.i. de $N_{4'-7''}$. Junto con la l.i. de $N_{6''-7}$ se da la l.i. de $N_{4'-5''}$, en la cual, la parte útil de la recta derecha se sitúa hasta el nudo *5* y la de la izquierda, hasta el *4*.

Más complicada va a ser la construcción de la l.i. de $N_{5''-6''}$. El asunto radica en que esta barra pertenece tanto a la armadura básica como a la barra auxiliar *4'5''6''7'*. La línea de influencia se construye superponiendo dos líneas de influencia.

Resumiendo todo lo dicho llegamos a las siguientes reglas.

1. Las líneas de influencia de las fuerzas axiles de las barras de un larguero armado, por cada una de las cuales y por no más de otras dos podemos trazar una sección, se construyen sin descomponer al larguero armado en partes.

2. Las líneas de influencia de las fuerzas axiles de las barras pertenecientes sólo a la armadura básica, a través de cada una de las cuales y aún de otras dos más, resulta imposible trazar un corte, siendo que estas líneas de influencia, en la armadura básica, son idénticas para circulación por arriba y por abajo, se construyen como en la armadura básica, sin ningún tipo de correcciones.

3. Las líneas de influencia de las fuerzas axiles de las barras entrantes sólo en la composición de la armadura básica, a través de cada una de las cuales y aún de otras dos barras más resulta imposible trazar un corte, siendo que estas líneas de influencia, en la armadura básica, para circulación por arriba y por abajo son *diferentes*, se construyen al comienzo, como en la armadura básica, ante dos supuestos: que la circulación es por abajo y que la circulación es por arriba. Luego, sobre la línea de influencia con circulación por abajo se llevan todos los nudos del cordón de carga, por los cuales el peso transmite la presión sobre los nudos básicos del cordón inferior y, sobre la línea de influencia con circulación por arriba, se llevan todos los nudos del cordón de carga, por los cuales, el peso transmite la presión sobre los nudos básicos del cordón superior y, las ordenadas vecinas se unen con rectas.

En el caso particular, cuando se tienen únicamente barras auxiliares de carga, las líneas de influencia se construyen sólo con circulación por este cordón de carga y no exigen correcciones.

4. Las líneas de influencia de las fuerzas axiles de las barras entrantes sólo en la composición de las barras auxiliares como apoyos de las cuales sirven los nudos de la armadura básica, se construyen como en una armadura simple, sobre dos apoyos.

5. Las líneas de influencia de las fuerzas axiles de las barras entrantes en la composición de la armadura básica y en la de las barras auxiliares, se obtienen adicionando las líneas de influencia

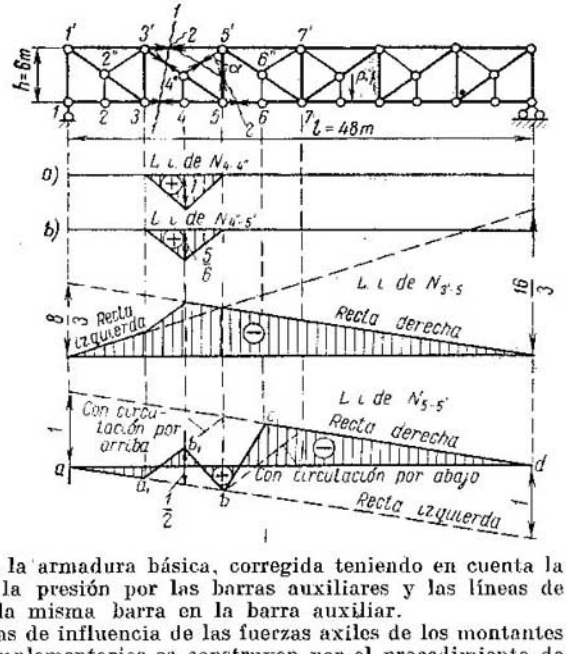


Fig. 134

de la barra en la armadura básica, corregida teniendo en cuenta la trasmisión de la presión por las barras auxiliares y las líneas de influencia de la misma barra en la barra auxiliar.

6. Las líneas de influencia de las fuerzas axiles de los montantes y péndolas complementarios se construyen por el procedimiento de recorte de los nudos complementarios.

Segunda variante. En la segunda variante el larguero armado no se divide en armadura básica y barras auxiliares. La construcción de las líneas de influencia se lleva a cabo por los cortes que atraviesan las barras básicas y auxiliares de la armadura, no coincidentes con las barras básicas, en base a las expresiones analíticas de las condiciones de equilibrio. Por eso, al principio se construyen las líneas de influencia de las fuerzas axiles en estas barras auxiliares no coincidentes con las barras de la armadura básica. Así, por ejemplo, en la armadura expuesta en la fig. 134, tal barra será la *4''-5'*, para la cual, la línea de influencia de la fuerza axil se construye por medio de la línea de influencia de la péndola complementaria *4-4''*. La línea de influencia para la péndola se construye recortando el nudo *4*. Cuando el peso está fuera del nudo $N_{4-4''} = 0$ y cuando está en él, $N_{4-4''} = 1$ (fig. 134, *a*). Del recorte del nudo *4''* obtenemos $N_{4''-5'} = \frac{5}{6} N_{4-4''}$ (fig. 134, *b*). Si al construir la línea de influencia de una fuerza axil, en las barras de la armadura básica se puede trazar un corte, a través de aquella barra para la cual esta línea se

determina y de otras dos, entonces, la construcción de la misma se efectúa como en las armaduras que no tienen barras auxiliares. Así puede ser construida la l.i. de $N_{3'-5'}$ utilizando el corte *I-I* y el punto de momento *5*. Cuando el peso se encuentra a la derecha $A \cdot 16 + + N_{3'-5'} \cdot 6 = 0$ y $N_{3'-5'} = -A \cdot \frac{8}{3}$; y si el peso está a la izquierda, $-B \cdot 32 - N_{3'-5'} \cdot 6 = 0$ y $N_{3'-5'} = -B \cdot \frac{16}{3}$.

La parte útil de la recta derecha se sitúa a la derecha del nudo *4* y la de la recta izquierda, a la izquierda del *3*. La línea de influencia está representada en la fig. 134, *c*.

Si al construir las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras de la armadura básica, resulta imposible trazar un corte a través de aquella barra para la cual estas líneas se determinan y de otras dos, entonces, es necesario trazarlo de tal modo, que la tercera de las otras barras sea auxiliar. Después, componer tal ecuación de equilibrio, la cual se compondría si en el corte no hubiera barra auxiliar. Las expresiones obtenidas muestran que la línea de influencia buscada se puede construir por medio de la adición de la línea de influencia en la armadura básica, si mentalmente suprimimos el elemento auxiliar seccionado, y la línea de influencia de este elemento auxiliar multiplicado por el coeficiente, cuyo valor se tiene en las condiciones de equilibrio compuestas.

Mostremos esto con el ejemplo de la construcción de la línea de influencia de la fuerza axil en el montante *5'-5*. Aquí es imposible trazar un corte por el montante y dos de las otras barras. Lo trazaremos seccionando la barra auxiliar *4''-5'*. Hallándose el peso a la derecha, del equilibrio de la parte izquierda tenemos que

$$\sum Y^{\text{izq}} = A + N_{5-5'} + N_{4''-5'} \cos\alpha = 0;$$
$$N_{5-5'} = -A - N_{4''-5'} \cos\alpha. \qquad \text{(a)}$$

Hallándose a la izquierda, del equilibrio de la parte derecha

$$\sum Y^{\text{der}} = B - N_{5-5'} - N_{4''-5'} \cos\alpha = 0;$$
$$N_{5-5'} = B - N_{4''-5'} \cos\alpha. \qquad \text{(b)}$$

En las expresiones (a) y (b), los primeros sumandos se conservan también en el caso de ausencia de la barra auxiliar *4''-5'* y los segundos sumandos marcan la influencia de ella. Así pues, al principio es necesario construir la línea de influencia sin tomar en cuenta la barra auxiliar y luego, adicionar la línea de influencia de la barra auxiliar con el factor corrector $(-\cos\alpha)$. A la línea de influencia que no tiene en cuenta la barra auxiliar se la designa *abcd* (fig. 134, *d*) y a la que la tiene en cuenta aa_1b_1bc.

La segunda variante de construcción de líneas de influencia se emplea también para las armaduras, en las cuales, los montantes o péndolas complementarios, trasmisores de la presión de los nudos complementarios del cordón de carga a las barras auxiliares no cargueras, no son verticales sino inclinados.

§ 63. CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE LOS APOYOS Y DE LAS FUERZAS AXILES EN LAS BARRAS DE LAS ARMADURAS DE DOS APOYOS CON PRESION HORIZONTAL. Examinemos las armaduras articuladas de dos apoyos con el apoyo móvil inclinado (fig. 135).

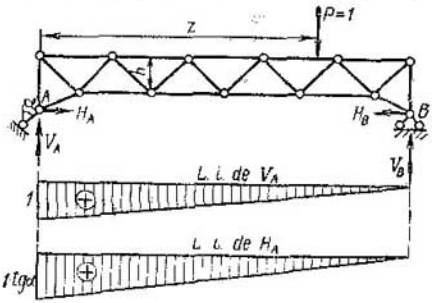


Fig. 135

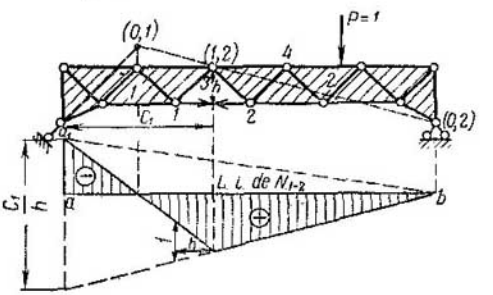


Fig. 136

Los métodos de cálculo de estas armaduras se aproximan a los de las armaduras de viga. De hecho, las primeras son con presión horizontal, por cuanto para carga vertical las reacciones de los apoyos poseen componentes horizontales. La construcción de l.i. para tales armaduras se efectúa en base a las reglas generales expuestas más arriba. Las líneas de influencia de las reacciones de los apoyos se determinan valiéndose de las expresiones:

$$V_A = \frac{l-z}{l}; \quad H_A = V_A \operatorname{tg}\alpha = \frac{l-z}{l}\operatorname{tg}\alpha; \quad V_B = \frac{z}{l}; \quad H_B = H_A. \qquad (7.19)$$

La manera más simple de construir las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras de las armaduras, es utilizando el método cinemático. En las figs. 135—137 se da la construcción de las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras cordonales de una armadura. En este caso, las líneas de influencia son binarias. Si la armadura tuviera apoyo rodante vertical, entonces, en las

líneas de influencia construidas, las líneas $a_1 b$ serían de cierre. La confrontación de las l.i. para un apoyo inclinado con la línea de influencia para un apoyo vertical muestra que para el primero, las fuerzas axiles en los cordones de las armaduras son menores, en

Fig. 137

valor absoluto, que para el segundo. En esta armadura, las líneas de influencia de las riostras, a excepción de las lindantes a los apoyos, no dependen del ángulo de inclinación del apoyo rodante.

CAPITULO VIII * CALCULO DE SISTEMAS TRIARTICULADOS

§ 64. TIPOS DE SISTEMAS TRIARTICULADOS. Sistema triarticulado se llama al compuesto por dos discos ligados entre sí con una articulación C (fig. 138, *a*, *b*) y a la tierra con dos apoyos fijos A y B. Si la articulación C está ubicada más arriba de la línea de las articulaciones de apoyo A—B, el sistema se denomina en arco, si más abajo, colgante. El sistema triarticulado es invariable, dado que la barra que falta entre los discos queda compensada por el vínculo de apoyo complementario.

Estos sistemas son estáticamente determinados respecto a las reacciones de los vínculos entre los discos lo que se desprende de la expresión (2.5). Ellos, a diferencia de los sistemas de viga, son sistemas con presión horizontal, los cuales, incluso para carga vertical, producen presiones inclinadas sobre los apoyos (fig. 138, *a*, *b*). Esto es fácil de establecer por medio de los siguientes razonamientos.

La reacción del apoyo fijo B, si la fuerza vertical P se encuentra sobre el disco izquierdo, por la propiedad del disco derecho desprovisto de carga, deberá pasar por la articulación C. Esta reacción B intersecará la fuerza P en el punto m. Dado que al disco izquierdo están aplicadas tres fuerzas: la P, la reacción de apoyo A y la reacción de la articulación C, igual en módulo y dirección a la reacción B, entonces, habiendo equilibrio, todas las fuerzas deberán intersecarse en un punto. Por consiguiente, la reacción de apoyo A está dirigida por la

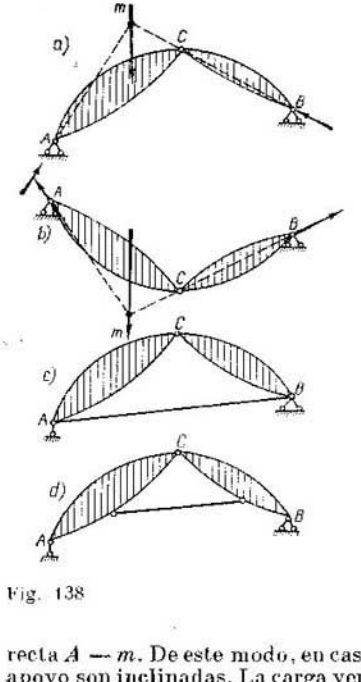


Fig. 138

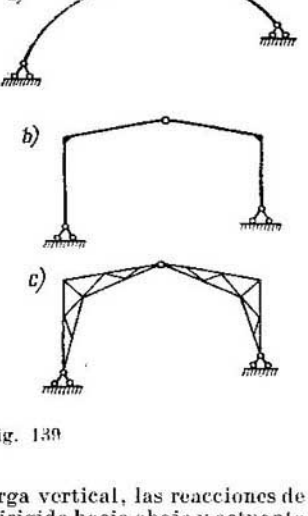


Fig. 139

recta $A - m$. De este modo, en caso de carga vertical, las reacciones de apoyo son inclinadas. La carga vertical dirigida hacia abajo y actuante sobre un sistema en arco (fig. 138, *a*), tiende a abrir los apoyos, como si los apartara y, la que actúa sobre un sistema colgante (fig. 138, *b*) tiende a acercarlos. Por eso es que los sistemas triarticulados son de *empuje horizontal*. Los elementos de los sistemas triarticulados bajo los apoyos (estribos, pilares) se diferencian de los elementos bajo los apoyos de los sistemas de viga en que aquéllos, para carga vertical, deberán recibir sobre sí no sólo las presiones verticales, sino también las horizontales. En los casos, en que es necesario librarse de las presiones horizontales, siendo la carga vertical, el sistema triarticulado se transforma en de viga, sustituyendo el apoyo fijo por uno rodante y colocando una barra, llamada tensor, entre los discos (fig. 138, *c*). Tales sistemas enmendados son denominados *triarticulados con tensores*, por cuanto si el tensor se coloca entre los puntos A y B, las fuerzas internas en los discos no varían. Si el tensor se coloca más arriba (fig. 138, *d*), entonces, el sistema se denominará *triarticulado con tensor sobreelevado*. Su trabajo se diferencia del trabajo del sistema común triarticulado.

En dependencia de lo que representa el disco integrante del sistema triarticulado, se distinguen: con barra curvilínea, arco triarticulado (fig. 139, *a*) o sistema colgante; con barra quebrada, pórtico triarticulado (fig. 139, *b*) y, por fin, armadura triarticulada, si cada disco representa una armadura (fig. 139, *c*). Los sistemas triarticulados encuentran empleo en diferentes construcciones: puentes, edificios industriales y públicos, estaciones, etc.

§ 65. CALCULO ANALITICO DE SISTEMAS TRIARTICULADOS BAJO CARGA FIJA, POR EL METODO ESTATICO. El cálculo de los sistemas triarticulados se comienza con la determinación de las reacciones de los apoyos.

En los dos apoyos fijos tienen lugar dos reacciones con valor y dirección desconocidos. Conviene descomponer a cada una de ellas en

Fig. 140

dos componentes con direcciones dadas. Lo más cómodo es descomponerlas en dirección vertical y por la línea AB de las articulaciones de apoyo. Designaremos a las reacciones verticales con V_A y V_B denominándolas *de viga* y, a las fuerzas inclinadas, que actúan por la recta AB, Z_A y Z_B, llamándolas *de arco* (fig. 140). Aunque las reacciones incógnitas componentes son cuatro, el sistema, como ya fue dicho, es estáticamente determinado. La presencia en él de la articulación intermedia C permite igualar a cero los momentos de las fuerzas que están por uno de sus lados, lo cual da otra ecuación complementaria, además de las tres de equilibrio.

Para la determinación de las reacciones de los apoyos, es cómodo escribir las ecuaciones de equilibrio en el siguiente orden:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma M_B &= 0, \text{ de la cual se determina } V_A; \\ \Sigma M_A &= 0, \text{ de la cual se determina } V_B; \\ \Sigma M_C^{\text{izq}} &= 0, \text{ de la cual se determina } Z_A; \\ \Sigma M_C^{\text{der}} &= 0, \text{ de la cual se determina } Z_B. \end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$

De las primeras ecuaciones (8.1) se ve que las reacciones V_A y V_B se determinan como en las vigas simples. Por eso es que a ellas se las denomina, precisamente, *reacciones de viga*.

Después de la determinación de las reacciones de apoyo, el cálculo de los sistemas triarticulados, como también el de los de viga, se reduce a la determinación de las fuerzas internas, para lo cual, no es cómodo emplear las componentes inclinadas Z_A y Z_B de las reacciones de apoyo, por eso, a su vez, ellas se descomponen en compo-

nentes verticales y horizontales. A las componentes horizontales H_A y H_B se las denomina de *presión horizontal*.

La magnitud de las componentes horizontales y verticales de Z_A y de Z_B será:

$$H_A = Z_A \cos\beta; \quad H_B = Z_B \cos\beta; \tag{8.2}$$

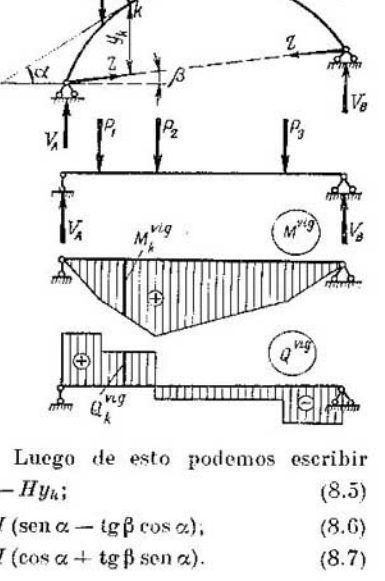
$$\Delta V_A = Z_A \operatorname{sen}\beta = H_A \operatorname{tg}\beta; \quad \Delta V_B = -Z_B \operatorname{sen}\beta = -H_B \operatorname{tg}\beta. \tag{8.3}$$

Las componentes verticales totales de las reacciones completas, al descomponer éstas en componentes verticales y horizontales se representan así:

$$V_A^* = V_A + H_A \operatorname{tg}\beta; \quad V_B^* = V_B - H_B \operatorname{tg}\beta. \tag{8.4}$$

Si en el sistema hay sólo carga vertical, entonces, de la condición de equilibrio $\Sigma Z = 0$ obtenemos que las fuerzas de arco y las presiones horizontales son iguales entre sí, esto es, que $Z_A = Z_B = Z$ y $H_A = H_B = H$.

Fig. 141



Compongamos, en la forma general, la expresión de las fuerzas sustituyentes del arco triarticulado, debidas a la carga vertical, expresándolas a través del momento flector M_h^{vig} y la fuerza transversal Q_h^{vig} de una viga simplemente apoyada de una misma luz y bajo una misma carga (fig. 141). A la fuerza axil que origina *la compresión* del arco la vamos a considerar positiva. Luego de esto podemos escribir

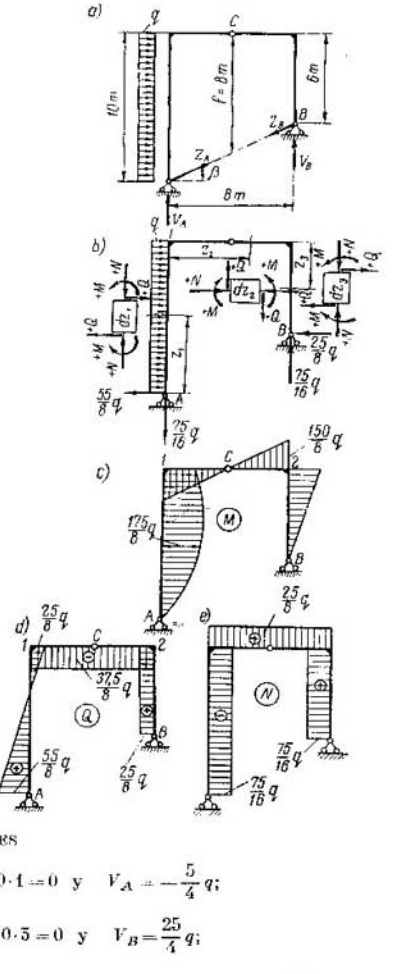
$$M_h = M_h^{vig} - Hy_h; \tag{8.5}$$

$$Q_h = Q_h^{vig} \cos\alpha - H(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{tg}\beta \cos\alpha), \tag{8.6}$$

$$N_h = Q_h^{vig} \operatorname{sen}\alpha + H(\cos\alpha + \operatorname{tg}\beta \operatorname{sen}\alpha). \tag{8.7}$$

De estas expresiones se ve que en los arcos los momentos flectores y las fuerzas transversales son menores que en las vigas. Sin embargo, en los arcos actúa una fuerza axil que no existe en las vigas. La viga trabaja a la flexión, mientras que el arco a la flexocompresión. Como se ve de la expresión (8.5), los

Fig. 142



momentos flectores en los arcos dependen de sus ordenadas y_k, las cuales pueden ser elegidas de tal manera que disminuyan o reduzcan a cero a los momentos flectores (véase el § 68), obligando al arco a trabajar sólo a la compresión. En las vigas es imposible evitar la flexión. Por eso en el arco se consume menos material que en la viga de igual luz, y con un arco podemos cubrir mayores luces que con una viga de igual peso. Al confrontar económicamente el arco y la viga, tampoco debemos olvidar la acción de las presiones inclinadas de los arcos sobre los apoyos que exige un aumento de las dimensiones de las partes inferiores del arco.

Ejemplo 13. Construir los diagramas de las fuerzas internas en un pórtico triarticulado (fig. 142, *a*).

1. DETERMINACION DE LAS REACCIONES

$$\sum M_B = V_A \cdot 8 - q \cdot 10 \cdot 1 = 0 \quad \text{y} \quad V_A = \frac{5}{4} q;$$

$$\sum M_A = -V_B \cdot 8 + q \cdot 10 \cdot 5 = 0 \quad \text{y} \quad V_B = \frac{25}{4} q;$$

$$\sum M_C^{\text{izq}} = V_A \cdot 4 - q \cdot 10 \cdot 5 - Z_A \cdot 8 \cos \beta = 0 \quad \text{y} \quad Z_A \cos \beta = H_A = -\frac{55}{8} q;$$

$$\sum M_C^{\text{der}} = -V_B \cdot 4 + Z_B \cdot 8 \cos \beta = 0 \quad \text{y} \quad Z_B \cos \beta = H_B = \frac{25}{8} q.$$

Las componentes verticales completas de las reacciones, por (8.4), son:

$$V_A^* = -\frac{5}{4}q - \frac{55}{8}q \cdot \frac{1}{2} = -\frac{75}{16}q; \qquad V_B^* = \frac{25}{4}q - \frac{25}{8}q \cdot \frac{1}{2} = \frac{75}{16}q.$$

En la fig. 142, *a* se expone el esquema del pórtico y en la fig. 142, *b*, las reglas de los signos para los momentos flectores y las fuerzas transversales y axiles.

2. CONSTRUCCION DE LOS DIAGRAMAS DE M, Q, Y N (fig. 142, *c*, *d*, *e*)

Elemento A—1. La sección se muestra en la fig. 142, *b*; $0 \leqslant z_1 \leqslant 10$ m.

$$M = \frac{55}{8}qz_1 - \frac{qz_1^2}{2}.$$

Para $z_1 = 0$, $M = 0$, siendo $z_1 = 5$ m, $M = \frac{175}{8}q$, si $z_1 = 10$ m, $M = \frac{150}{8}q$;

$$Q = \frac{dM}{dz_1} = \frac{55}{8}q - qz_1.$$

Para $z_1 = 0$, $Q = \frac{55}{8}q$, para $z_1 = 10$ m, $Q = -\frac{25}{8}q$ y $N = +V_A^* = \frac{75}{16}q$.

Los diagramas están representados en la fig. 142, *c*, *d*, *e*.

Elemento 1—2. $0 \leqslant z_2 \leqslant 8$ m.

$$M = \frac{55}{8}q \cdot 10 - \frac{75}{16}qz_2 - q\frac{10^2}{2} - \frac{150}{8}q - \frac{75}{16}qz_2; \quad z_2 = 0; \quad M = \frac{150}{8}q; \quad z_2 = 8 \text{ m},$$

$$M = -\frac{150}{8}q; \quad Q = -\frac{dM}{dz_2} = -\frac{75}{16}q; \quad N = -\frac{55}{8}q + q \cdot 10 = \frac{25}{8}q.$$

Elemento 2—B. $0 \leqslant z_3 \leqslant 6$ m.

$$M = \frac{25}{8}q(6 - z_3). \quad \text{Para } z_3 = 0, \; M = \frac{150}{8}q,$$

para $z_3 = 6$ m, $M = 0$, $Q = -\frac{dM}{dz_3} = \frac{25}{8}q$, $N = +\frac{75}{8}q$.

El signo menos en $\frac{dM}{dz_3}$ fue colocado porque el origen de la coordenada z_3 está ubicado en el extremo derecho de la barra.

§ 66. CALCULO GRAFICO DE LOS SISTEMAS TRIARTICULADOS BAJO CARGA FIJA POR EL METODO ESTATICO

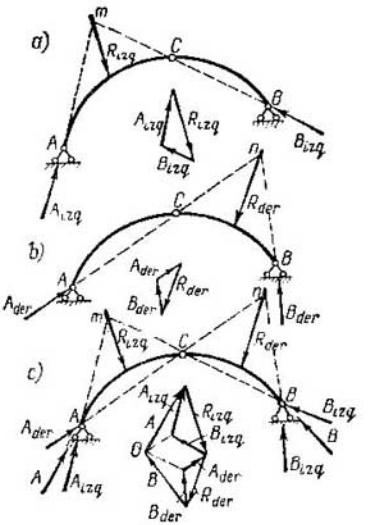
1. DETERMINACION DE LAS REACCIONES DE APOYO

Supongamos al principio, que la fuerza R_{izq} actúa sólo en la parte izquierda del sistema triarticulado (fig. 143). En este caso, es fácil establecer la dirección de las reacciones de apoyo. La reacción B_{izq} deberá pasar por la articulación C. Esto significa que la fuerza B actúa en el punto C sobre el disco izquierdo, al cual están aplicadas tres fuerzas: la carga R_{izq}, la reacción B_{izq} en el punto C y la A_{izq} en el A. Dado que el disco está en equilibrio, entonces, ellas se cortan en un punto m, en la intersección de las líneas de acción de las fuerzas conocidas R_{izq} y B_{izq}. De este modo se determina la línea de acción de la reacción de apoyo A_{izq}. Ahora queda equilibrar a la reacción R_{izq} con dos fuerzas cuyas direcciones se han determinado. Para esto, se construye el triángulo de fuerzas trazando la fuerza R_{izq}, de su extremo superior se traza una línea paralela a la reacción A_{izq}

y del inferior, paralela a la reacción B_{izq}. Las flechas en el triángulo de fuerzas se colocan de modo tal, que una siga a la otra. Así se determina el valor y la dirección de las reacciones debidas a la carga, ubicada en el disco izquierdo.

En el disco derecho, las reacciones debidas a la carga se determinan análogamente (fig. 143, *b*). En este caso, se conoce de antemano que la línea de acción de la reacción A_{der} deberá pasar por la arti-

Fig. 143



culación *C*. Ella se cruzará con la fuerza R_{der} en el punto *n*. Por ese mismo punto también ha de cruzarse con ellas la reacción B_{der}. A continuación podemos construir el triángulo de fuerzas y determinar la magnitud y dirección de las reacciones debidas a la carga sobre el disco derecho del sistema.

Si simultáneamente tenemos cargas sobre las partes izquierda y derecha del sistema, entonces, deberemos examinar cada carga por separado, por el principio de la independencia de la acción de las fuerzas (fig. 143, *c*). La diferencia radica sólo en que es necesario construir los triángulos de fuerzas en una misma escala, de manera que a R_{izq} le siga R_{der} y luego, sumar geométricamente las reacciones obtenidas A_{izq} y A_{der} y B_{izq} y B_{der}. Para esto, con los lados B_{izq} y A_{der} es necesario construir el paralelogramo con el vértice *O*. Trasladando A_{der} y B_{izq} paralelamente hasta que coincidan con los lados del paralelogramo, trazados con puntos, obtenemos la posibilidad de componer directamente las reacciones geométricamente, dado que luego de tal desplazamiento las reacciones componentes van a seguirse una a otra. De este modo, obtenemos las reacciones totales *A* y *B*. El polígono de fuerzas completo, en este caso será cerrado. En él las fuerzas están ubicadas también en la misma secuencia que en el arco, al recorrerlo en sentido de las agujas del reloj. Detrás de la fuerza R_{izq} sigue la R_{der}, después la reacción *B* y por fin la *A*.

2. POLIGONO DE RESULTANTES Y CURVA FUNICULAR

El polígono de resultantes es un polígono funicular para las fuerzas actuantes sobre el sistema, pero no casual, sino construido

con un polo especial, de tal modo, que el primer rayo pase por la articulación de apoyo izquierda A (fig. 144). En el polígono de fuerzas se adopta como polo el punto O que se encuentra sobre el extremo del vector de la reacción B y en el comienzo del vector de la reacción A. El primer rayo de este polígono O-a_1 determina la reacción A en magnitud y dirección y, el primer rayo del polígono funicular A-k, su línea de acción. El segundo rayo del polígono de fuerzas O-b_1 representa la resultante de la reacción de apoyo A y de la fuerza P_1, que tiene el origen en el polo O y, el segundo rayo del polígono

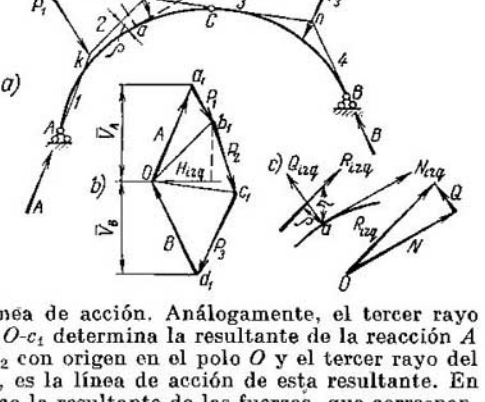


Fig. 144

funicular k-m, es su línea de acción. Análogamente, el tercer rayo del polígono de fuerzas O-c_1 determina la resultante de la reacción A y de las fuerzas P_1 y P_2 con origen en el polo O y el tercer rayo del polígono funicular m-n, es la línea de acción de esta resultante. En cada sector dado del arco la resultante de las fuerzas, que corresponde a un rayo determinado del polígono funicular, es la resultante de todas las fuerzas *izquierdas*. Por eso, generalizando se puede decir, que *cada rayo del polígono funicular es la línea de acción de la resultante de todas las fuerzas izquierdas, la magnitud de la cual se determina por el correspondiente rayo del polígono de fuerzas.* Debido a esta circunstancia, el tercer rayo del polígono funicular, en la fig. 144, deberá pasar obligatoriamente por la articulación C, puesto que de lo contrario, la resultante de las fuerzas izquierdas, no pasaría por este punto, lo cual es imposible. Así también el cuarto rayo del polígono funicular, por las mismas consideraciones, deberá pasar por la articulación B.

Puesto que cada rayo del polígono funicular y el que le corresponde del polígono de fuerzas determinan completamente la resultante de las fuerzas izquierdas, entonces, el polígono funicular también es llamado polígono de resultantes.

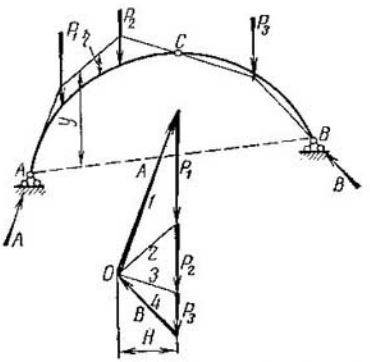
Daremos un resumen de los resultados obtenidos:

1. Polígono de resultantes es un polígono funicular especial para la carga dada, construido a partir del polo O, donde conver-

gen en un polígono de fuerzas cerrado, construido recorriendo el sistema en sentido de las agujas del reloj, las reacciones A y B con el primer rayo que atraviesa a la articulación A.

2. El polígono de resultantes y el de fuerzas determinan completamente, para cualquier sección, la resultante de las fuerzas izquierdas, dado que cada rayo del primer polígono es su línea de acción y, el rayo correspondiente del segundo polígono, para el cual se construyó el primero, es el vector de las resultantes de las fuerzas izquierdas.

Fig. 145



3. El polígono de resultantes deberá pasar, obligatoriamente, por las articulaciones B y C.

4. Por cuanto el polígono de resultantes y el de fuerzas determinan completamente la resultante de las fuerzas izquierdas para cualquier sección, entonces, por ellos pueden ser determinadas las fuerzas internas, como esto se expone más adelante, en cualquier sección del arco.

Si el arco se halla cargado con una carga continua, al construir el polígono de resultantes, ella puede ser sustituida por varias fuerzas concentradas. Al aumentar infinitamente la cantidad de fuerzas concentradas que sustituyen a la carga repartida, el polígono de resultantes en esta sección se transforma en la curva de resultantes, o dicho de otro modo, en la curva funicular, al tiempo que la cadena poligonal de fuerzas externas en el polígono de fuerzas, se transforma en *curva* o recta de fuerzas. La tangente a la curva funicular determina la línea de acción de la resultante de las fuerzas izquierdas y, la magnitud de esta última se establece por el rayo paralelo a la tangente, hasta la curva de fuerzas.

Las ecuaciones del polígono de resultantes y de la curva funicular pueden ser encontradas, de la condición de que el momento de todas las fuerzas izquierdas (o derechas) con respecto a cualquiera de sus puntos es igual a cero. En el caso de carga vertical, esta condición permite encontrar fácilmente la ecuación del polígono de resultantes o de la curva funicular. En este caso, escribimos la condición en la forma general:

$$M = M^{\text{vig}} - Hy = 0,$$

donde M^{vig} es el momento debido a las fuerzas verticales izquierdas, igual al momento flector en una viga simplemente apoyada, debido a la misma carga vertical;

y es la ordenada del polígono de resultantes o de la curva funicular, medida desde la línea de las articulaciones de apoyo $A - B$ (fig. 145).

De aquí tenemos que

$$y = \frac{M^{vig}}{H}. \tag{8.8}$$

Esta es, en la forma general, la ecuación del polígono de resultantes o de la curva funicular. De ella podemos obtener la ecuación diferencial de la curva funicular. Para esto diferenciamos la expresión (8.8) dos veces:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{H} \cdot \frac{d^2M^{vig}}{dz^2} = \frac{q}{H}, \tag{8.9}$$

donde q es la intensidad de la carga repartida

3. DETERMINACION DE LOS MOMENTOS FLECTORES, LAS FUERZAS AXILES Y TRANSVERSALES

La determinación de las fuerzas internas se efectúa por el polígono de fuerzas y el de resultantes, los cuales, conjuntamente, determinan la magnitud y la posición de las resultantes de las fuerzas izquierdas para cualquier sección. Las fuerzas transversal y axil se calculan descomponiendo la resultante de las fuerzas izquierdas determinada con el correspondiente rayo del polígono de fuerzas, en las componentes tangente y normal al eje del arco. El momento flector se determina por el producto de la resultante de las fuerzas izquierdas por la longitud de la perpendicular bajada desde un punto del eje del arco al correspondiente rayo del polígono de resultantes.

Para la determinación de N y Q se traza en escala, como se muestra en la fig. 144, *c*, la fuerza R_{izq}. Luego, desde uno de sus extremos se traza una recta paralela a la tangente y, desde el otro, otra paralela a la normal. Por cuanto en el caso dado se trata de la descomposición de la fuerza R_{izq}, entonces, las flechas en el triángulo de fuerzas deberán estar dirigidas al encuentro de la resultante. Los signos de N y Q se determinan de la confrontación de los vectores N y Q, obtenidos de la descomposición, con sus direcciones positivas mostradas en la fig. 144. Esta descomposición puede ser efectuada en el polígono de fuerzas. El momento flector (fig. 144, *c*) es

$$M = R_{izq}\ \rho = H_{izq}\ \eta,$$

donde R_{izq} es la resultante de todas las fuerzas izquierdas;

ρ es la longitud de la perpendicular bajada desde un punto del eje del arco al polígono de resultantes;

H_{izq} es la componente horizontal de la resultante de las fuerzas izquierdas;

η es la distancia vertical desde un punto del eje del arco o pórtico hasta el polígono de resultantes.

La expresión del momento flector en la forma $M = H\eta$ es muy cómoda en el caso de carga vertical, cuando la componente horizontal de cualquier resultante de las fuerzas izquierdas es igual al empuje H del arco (véase la fig. 145). En este caso, las ordenadas de la figura entre el polígono de resultantes y el eje del arco, medidas verticalmente, determinan a los momentos flectores en el arco, en la escala del empuje H, esto es, las ordenadas de la figura multiplicadas por H son iguales a los momentos flectores. De esta manera, la figura entre el eje del arco y el polígono de resultantes, sombreada con líneas verticales, representa al diagrama de los momentos flectores. Por cuanto este diagrama, en una viga simplemente apoyada, para la misma carga, puede ser determinado, también por cualquier polígono funicular, entonces, para este fin, se podría adoptar el polígono de resultantes, en el cual la línea de cierre pasa por las articulaciones A y B. Entonces, en la fig. 145, se pueden comparar a los momentos flectores del arco con los de la viga, los cuales se determinan por las ordenadas verticales desde la línea AB hasta el polígono de resultantes. Los momentos flectores en la viga son significativamente mayores que en el arco.

De lo dicho se desprende que los momentos flectores disminuyen si el polígono de resultantes se aproxima al eje del arco o del pórtico. Pero, si el polígono de resultantes coincide con el eje del pórtico y la curva funicular con el del arco, entonces, los momentos flectores son iguales a cero.

§ 67. POLIGONO Y CURVA DE PRESIONES EN EL ARCO. La línea que une los centros de presiones en los cortes transversales del arco se llama, para cargas concentradas, polígono de presiones y, para cargas repartidas, curva de presión.

Mostremos que el polígono y la curva de presiones, se diferencian del polígono de resultantes y de la curva funicular.

Examinemos primeramente el polígono de resultantes y el de presiones para fuerzas concentradas (fig. 146, *a*). El polígono de resultantes está compuesto por las rectas *ab* y *bc*. Los centros de presiones en las secciones del arco a la izquierda de la sección d_1 y a la derecha de la d_2 están sobre el polígono de resultantes y, por consiguiente, en las partes *a-1* y *b-c*, el polígono de presiones coincide con él. En la sección a *ds* a la izquierda del punto de aplicación de la fuerza P, el centro de presión estará en el punto *1* y, de la sección a *ds* más a la derecha, en el *2*, por cuanto la resultante de las fuerzas, para él izquierdas, coincide con el rayo *bc*. El polígono de presiones está compuesto por las rectas *a1* y *2c* y, en estas dos secciones infinitamente cercanas, cerca de la fuerza P, posee fractura. Tales fracturas cerca de las fuerzas concentradas no aparecerán sólo allí donde éstas están dirigidas por la normal al eje del arco. En estos casos, el polígono de presiones coincide con el de resultantes.

Ahora examinemos a la curva funicular para el caso de carga repartida. La resultante de las fuerzas izquierdas, en el límite de las

cargas izquierdas y derechas, está dirigida por la tangente a la curva funicular (fig. 146, *b*). En el caso de carga vertical, la resultante de las fuerzas izquierdas pasa por el punto *m*, ubicado sobre la vertical que divide a las cargas en izquierdas y derechas. Ella corta a la

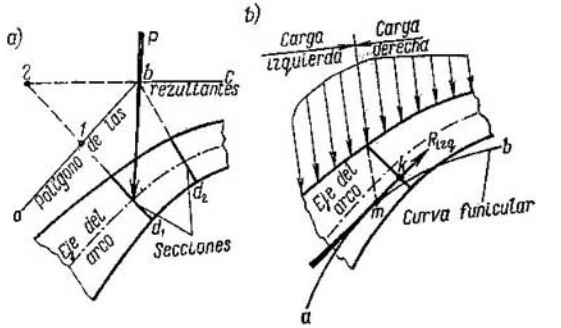


Fig. 146

sección en el punto *k*, fuera de la curva funicular. Esto significa que la curva de presiones, como esto sucede frecuentemente, no coincide con la curva funicular.

Estas curvas son coincidentes en el caso de cargas repartidas, si las mismas están dirigidas por las normales al eje del arco y, lo serán además en el caso cuando el eje del arco con la propia carga aplicada a él, coincida con la curva funicular.

§ 68. EJE RACIONAL DEL ARCO TRIARTICULADO. Vamos a considerar como eje teórico racional del arco, a aquel para el cual el volumen teórico del material del arco, asegurando la solidez necesaria, es el mínimo. En el caso general, en un arco de contorno arbitrario surgen las fuerzas internas N, Q y M debidas a la carga dada. El área de la sección transversal del arco será función de estas magnitudes y de la característica del material σ_0, esto es,

$$F = f(N,\ M,\ Q,\ \ldots,\ \sigma_0).$$

El aspecto de esta función dependerá del método escogido para la elección de las secciones. Correspondientemente, el volumen del arco será igual a:

$$V = \int f(N,\ M,\ Q,\ \ldots,\ \sigma_0)\, ds. \qquad (8.10)$$

Los valores de las fuerzas internas M, Q y N contenidas en esta expresión, para la carga dada, varían con la variación del eje del arco. De tal modo, la determinación del eje racional del arco se reduce a encontrar el mínimo de la integral (8.10) al variar el eje del arco, lo cual, incluso en los casos simples, es muy complicado. No obstante, ciertos resultados cualitativos pueden ser obtenidos en base a las siguientes consideraciones simples. Las experiencias de proyec-

ción y los resultados de los cálculos efectuados muestran que, ante las variaciones del eje del arco, permaneciendo la luz y la flecha de altura libre invariables, la longitud del eje del arco y la fuerza axil N varían insignificativamente, al tiempo que el momento flector M y la fuerza transversal Q varían sustancialmente. La presencia de M y Q, para otras condiciones iguales, origina siempre un aumento significativo de las secciones y, por lo tanto, incluso un incremento, también considerable, del volumen teórico del arco. Por eso, es de esperar un volumen teórico mínimo del arco en aquel caso, cuando el momento flector en él, por todas sus secciones, es igual a cero.

Esto significa que *el eje racional del arco coincide con la curva de presión*. Esta es una regla verificada por la práctica de proyección bien conocida; usualmente, se trata observarla al fijar el eje del arco, para una carga inmóvil conocida.

Como fue establecido, hablando en general, la curva de presión no coincide con la curva funicular, pero, coincide, si el eje del arco, teniendo la carga aplicada a él, coincide con la curva de resultantes. Justamente, son los casos que vamos a examinar, considerando como racional a tal eje de arco, que coincide con la curva funicular. La determinación de ésta para una carga conocida depende de si, al variar el eje mencionado, varía o no la propia carga. Si se tiene en cuenta rigurosamente el peso propio sobre el arco, la carga sobre éste siempre dependerá de su configuración. Pero si el peso propio del arco se toma aproximado, entonces, pueden haber casos, cuando la carga efectiva no depende de la configuración del arco.

§ 60. EJE RACIONAL DEL ARCO TRIARTICULADO CON CARGA VERTICAL QUE NO DEPENDE DE SU CONFIGURACION. En el arco con eje racional, los momentos en todas las secciones son iguales a cero. En el caso de carga vertical, esto se puede expresar así:

$$M_k = M_k^{\text{viga}} - H y_k = 0,$$

donde M_k^{viga} es el momento flector, debido a la carga dada, en una viga simplemente apoyada;

y_k es la ordenada vertical del eje del arco, contada desde *la línea de las articulaciones de apoyo A-B*.

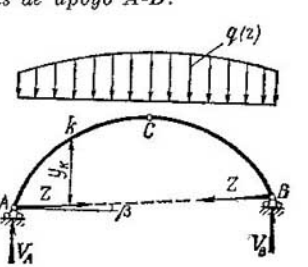


Fig. 147

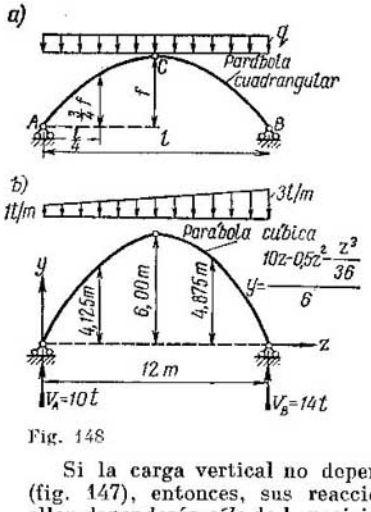


Fig. 148

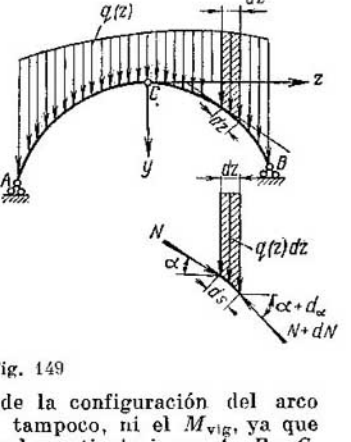


Fig. 149

Si la carga vertical no depende de la configuración del arco (fig. 147), entonces, sus reacciones tampoco, ni el M_{vig}, ya que ellas dependerán *sólo* de la posición de las articulaciones A, B y C. Por eso

$$y_h = M_h^{vig} : H. \qquad (8.11)$$

Esta, es, precisamente, *la ecuación del eje racional del arco coincidente con la curva funicular, para una carga independiente de la configuración del arco*. En este caso, el eje racional del arco se determina por la forma del diagrama de momentos flectores en una viga simplemente apoyada M^{vig} debidos a la carga actuante sobre el arco. Así, por ejemplo, cuando la carga es uniforme, el diagrama de los momentos flectores se representa con una parábola cuadrada. En consecuencia, también el eje del arco es una parábola cuadrada (fig 148, *a*). Si la carga dada varía linealmente (fig. 149, *b*), entonces, el diagrama de los momentos flectores en una viga simplemente apoyada y el eje racional del arco serán parábolas cúbicas.

§ 70. EJE RACIONAL DEL ARCO TRIARTICULADO CON CARGA VERTICAL DEPENDIENTE DE SU CONFIGURACION. Compongamos la ecuación diferencial del eje racional de un arco coincidente con la curva funicular. Examinemos un elemento infinitesimal del arco de configuración racional, cuyas fuerzas internas se reducen sólo a las fuerzas axiles (fig. 149). Compongamos la ecuación de equilibrio del elemento en forma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje z:

$$\Sigma Z = N \cos \alpha - (N + dN) \cos (\alpha + d\alpha) - 0$$

o bien

$$N\cos\alpha - [N\cos\alpha + d(N\cos\alpha)] = 0,$$

de donde obtenemos $d(N\cos\alpha) = 0$, lo que significa que

$$N\cos\alpha = H = \text{const}. \tag{8.12}$$

Ahora componemos la ecuación de equilibrio en forma de la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje y:

$$\sum Y = N\operatorname{sen}\alpha + q(z)\,dz - (N + dN)\operatorname{sen}(\alpha + d\alpha) = 0$$

ó

$$N\operatorname{sen}\alpha + q(z)\,dz - [N\operatorname{sen}\alpha + d(N\operatorname{sen}\alpha)] = 0.$$

O de otra manera

$$\frac{d}{dz}(N\operatorname{sen}\alpha) = q(z).$$

Empleando (8.12) obtenemos que

$$\frac{d}{dz}(H\operatorname{tg}\alpha) = \frac{d}{dz}\left(H\frac{dy}{dz}\right) = H\frac{d^2y}{dz^2} = q(z),$$

de donde obtendremos la ecuación diferencial del eje racional coincidente con la curva funicular,

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q(z)}{H}. \tag{8.13}$$

Esta es la misma que (8.9).

La carga actuante sobre un arco puede depender de manera diferente de su contorno. Examinemos sólo el caso particular de un arco

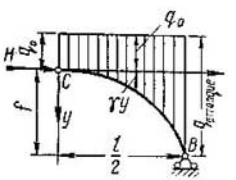


Fig. 150

simétrico bajo carga, la expresión de la cual es la siguiente (fig. 150):

$$q(z) = q_0 + \gamma_1 y. \tag{8.14}$$

La ecuación diferencial (8.13) para tal caso tiene el aspecto:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q_0 + \gamma y}{H}$$

ó

$$\frac{d^2y}{dz^2} - k^2y = \frac{q_0}{\gamma}k^2, \tag{8.15}$$

donde $k^2 = \frac{\gamma}{H}$ y H es la presión horizontal del arco. La solución de la ecuación (8.15) tiene la forma:

$$y = A\operatorname{sh}kz + B\operatorname{ch}kz - \frac{q_0}{\gamma}.$$

Correspondientemente

$$\frac{dy}{dz} = kA \operatorname{ch} kz + kB \operatorname{sh} kz.$$

Determinamos las constantes de la integración] las condiciones en el origen de las coordenadas para el arco simétrico:

$$\text{para } z = 0 \quad \frac{dy}{dz} = 0, \text{ lo que da } A = 0;$$

$$\text{siendo } z = 0 \quad y = 0, \text{ lo que da } B = \frac{q_0}{\gamma}$$

La ecuación del eje racional toma la forma:

$$y = \frac{q_0}{\gamma} (\operatorname{ch} kz - 1). \tag{8.16}$$

A la curva determinada por ella se la denomina *catenoide*.

Escribimos la ecuación (8.16) en otra forma. Para esto, al principio, utilizando (8.14) obtenemos la siguiente igualdad:

$$q_{arr} = q_0 + \gamma f,$$

de donde $\gamma = \frac{q_{arr} - q_0}{f} = \frac{q_0 (m-1)}{f}$, en ella $m = \frac{q_{arr}}{q_0}$.

Colocando la expresión para γ en (8.16), tendremos que

$$y = \frac{f}{m-1} (\operatorname{ch} kz - 1). \tag{8.17}$$

El parámetro de la curva $k^2 = \frac{\gamma}{H}$ se determina por la condición de que el eje del arco pase por el punto de sustentación, esto es, para $z = \frac{l}{2}$ e $y = f$

$$f = \frac{f}{m-1} \left(\operatorname{ch} k \frac{l}{2} - 1 \right),$$

de donde

$$m = \operatorname{ch} \frac{kl}{2}, \quad k = \sqrt{\frac{\gamma}{H}} = \frac{2}{l} \operatorname{arch} m. \tag{8.18}$$

Una vez determinada k obtenemos fácilmente la expresión para el empuje del arco debido a la carga

$$H = \frac{\gamma}{k^2} = \frac{q_0 (m-1)}{fk^2}. \tag{8.19}$$

La fuerza axil en cualquier sección del arco es

$$N = \frac{H}{\cos \alpha} = H \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dz} = \frac{f}{m-1} k \operatorname{sh} kz;$$

$$N = H \sqrt{1 + \frac{k^2 f^2}{(m-1)^2} \operatorname{sh}^2 kz}; \tag{8.20}$$

$$N_{máx} = H \sqrt{1 + \frac{k^2 f^2}{(m-1)^2} \operatorname{sh}^2 \frac{kl}{2}} = H \sqrt{1 + k^2 f^2 \frac{m+1}{m-1}}. \tag{8.21}$$

La componente vertical de la reacción de apoyo se determina por la proyección de la fuerza $N_{máx}$ sobre el eje vertical:

$$V = N_{máx} \operatorname{sen} \alpha_{arr} = H \operatorname{tg} \alpha_{arr};$$

$$V = H \frac{f}{m-1} k \operatorname{sh} k \frac{l}{2}. \tag{8.22}$$

Si la carga se determina por la expresión

$$q(z) = q_0 - \gamma_1 y,$$

entonces, la ecuación diferencial (8.13) será

$$\frac{d^2y}{dz^2} + k_1^2 y = \frac{q_0}{\gamma_1} k_1^2,$$

donde

$$k_1^2 = \frac{\gamma_1}{H}.$$

Su solución es:

$$y = C \operatorname{sen} k_1 z + D \cos k_1 z + \frac{q_0}{\gamma_1}.$$

Correspondientemente:

$$\frac{dy}{dz} = k_1 C \cos k_1 z - k_1 D \operatorname{sen} k_1 z.$$

Para la determinación de las constantes arbitrarias se emplean las mismas condiciones:

1) Para $z = 0$; $\frac{dy}{dz} = 0$, lo que determina que $C = 0$;

2) Para $z = 0$; $y = 0$, lo que determina que $D = -\frac{q_0}{\gamma_1}$.

Por consiguiente,

$$y = \frac{q_0}{\gamma_1} (1 - \cos k_1 z) = \frac{f}{1 - m_1} (1 - \cos k_1 z),$$

donde

$$m_1 = \frac{q_{arr}}{q_0} \leqslant 1.$$

Con la misma simplicidad se pueden obtener las demás fórmulas (8.19 — 8.22) para el nuevo eje del arco.

§ 71. DETERMINACION DEL EJE RACIONAL DEL ARCO TRIARTICULADO POR EL PROCEDIMIENTO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS. Partiendo de premisas simplificadas aceptadas, el eje racional del arco triarticulado, para cargas repartidas, coincide con la curva funicular y, para cargas concentradas, con el polígono de resultantes. La coincidencia del eje del arco con la curva funicular o con el polígono de resultantes, en los casos en que la

carga depende de la configuración del arco, se puede obtener por medio de aproximaciones sucesivas, las que pueden ser efectuadas tanto analíticamente como gráficamente.

1. RESOLUCION ANALITICA

La complejidad de la integración de la ecuación diferencial (8.13) consiste en que la carga $q(z)$ es función de una configuración desconocida del arco. Para la expresión de la carga se toma la ecuación de cualquier curva parecida al eje del arco. Luego, se efectúa la integración de la ecuación diferencial (8.13). La curva funicular obtenida se adopta como nuevo eje corregido, por el cual, nuevamente se determina la intensidad de la carga q, y la ecuación (8.13), en la cual el segundo miembro ya fue determinado, se integra otra vez. Y así, hasta que la curva funicular sucesiva sea lo suficientemente aproximada a la anterior. En muchos casos, la segunda aproximación suele ser suficiente. Así, por ejemplo, para el caso cuando $q(z) = q_0 + \gamma y$, la ecuación diferencial (8.13) tiene el aspecto:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q_0 + \gamma y}{H}.$$

En primera aproximación, suponemos para su segundo miembro $y = \frac{4fz^2}{l^2}$, entonces,

$$H\frac{d^2y}{dz^2} = q_0 + \gamma\frac{4fz^2}{l^2}.$$

Integramos por primera vez

$$H\frac{dy}{dz} = q_0 z + \gamma\frac{4f}{l^2}\cdot\frac{z^3}{3} + C.$$

La constante C de la integración se determina de la condición: siendo $z = 0\ \frac{dy}{dz} = 0$, lo que da $C = 0$. Integramos por segunda vez

$$Hy = q_0\frac{z^2}{2} + \frac{\gamma f}{l^2}\cdot\frac{z^4}{3} + D.$$

La constante D de la integración se determina de la condición para $z = 0\ \ y = 0$, obtenemos $D = 0$. Por consiguiente,

$$y = \frac{1}{H}\left(q_0\frac{z^2}{2} + \gamma\frac{f}{3l^2}z^4\right).$$

La ecuación de la curva funicular fue obtenida de la segunda aproximación. Ella fija ordenadas cercanas a las determinadas por las (8.16) y (8.17). Si fuera necesario, el resultado se puede hacer más exacto con una siguiente aproximación.

2. RESOLUCION GRAFICA

La resolución gráfica está basada en las mismas operaciones que se emplean en la analítica, pero ellas se llevan a cabo gráficamente. En este caso, es necesario cumplir lo siguiente:

1) fijar un eje cualquiera de arco y determinar las cargas efectivas;

2) dividir las cargas repartidas en concentradas y construir el polígono de resultantes;

3) adoptar por eje nuevo a la curva situada entre el eje viejo y el polígono de resultantes (más cercano al último), luego, repetir la operación. Y así, hasta que el nuevo polígono de resultantes no sea lo suficientemente parecido al anterior.

El método de aproximaciones sucesivas se emplea para cualquier tipo de cargas.

§ 72. EJE RACIONAL DEL ARCO TRIARTICULADO BAJO CARGA RADIAL. Examinemos el equilibrio de un elemento infinitesimal de arco con carga radial (fig. 151). Tomemos la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al centro de curvatura del elemento:

$$\Sigma M_0 = N\rho - (N + dN)\rho = 0,$$

de donde obtenemos que $dN = 0$, lo cual significa que $N = \text{const}$. *En el caso de carga radial, la fuerza axil en el arco, trazada por la curva funicular, es constante a lo largo de toda su longitud.*

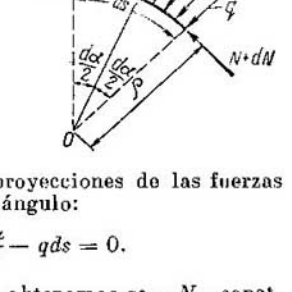


Fig. 151

Ahora componemos la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre la dirección de la bisectriz del ángulo:

$$\sum U = N \operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} + N \operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} - q\,ds = 0.$$

Realizando la sustitución $\operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$, obtenemos $q\rho = N = \text{const}$.

El radio de curvatura del arco

$$\rho = \frac{N = \text{const}}{q} \tag{8.23}$$

es inversamente proporcional a la intensidad de la fuerza actuante. La expresión (8.23) es la ecuación diferencial del eje racional del arco, coincidente con la curva funicular, en el caso de una carga radial, cuya resolución, corrientemente, resulta complicada. En el caso en que $q = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, esta curva es un arco de circunferencia.

§ 73. METODO ESTATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO EN EL ARCO TRIARTICULADO

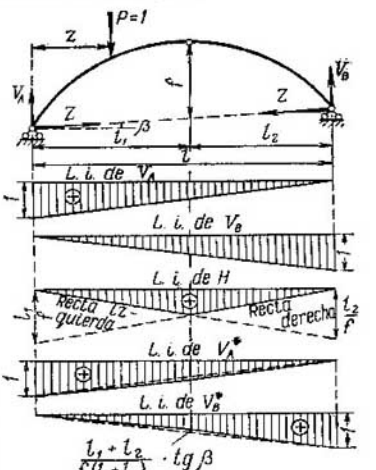
1. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE UNA VIGA

Las expresiones analíticas de las reacciones de apoyo debidas a $P=1$ tienen el aspecto

$$V_A = 1\,\frac{l-z}{l}\,; \qquad V_B = 1\,\frac{z}{l}\,.$$

Ellas coinciden con las expresiones de las reacciones de las vigas simplemente apoyadas. Las líneas de influencia de las reacciones de apoyo V_A y V_B están representadas en la fig. 152.

Fig. 152



2. LINEA DE INFLUENCIA DE LA PRESION HORIZONTAL

La expresión general de presión horizontal, para carga vertical, tomada de (8.5), es

$$H = \frac{M_C^{v\,lg}}{f}\,.$$

De esta fórmula se desprende que la línea de influencia de la presión horizontal H puede ser construida empleando la línea de influencia del momento $M^{v\,lg}$ en una viga simplemente apoyada para la sección con coordenada l_1, si sus ordenadas se dividen por f. Por eso, en correspondencia con las reglas de construcción de la línea de influencia de los momentos en tales vigas, trazamos por debajo del apoyo izquierdo el segmento $\frac{l_1}{f}$ y, uniéndolo con el punto de la base por debajo del apoyo derecho, obtenemos la recta derecha; trazamos por debajo del apoyo derecho el segmento $\frac{l_2}{f}$ y, uniéndolo con el punto de la base por debajo del apoyo izquierdo, obtenemos la recta izquierda. La línea de influencia de la presión horizontal H representa un triángulo con el vértice por debajo de la articulación central C y con la ordenada en el vértice igual a $\frac{l_1 l_2}{(l_1+l_2)f}$.

3. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS COMPONENTES VERTICALES COMPLETAS DE LAS REACCIONES

Las componentes verticales completas de las reacciones se determinan por la fórmula (8.4). Por cuanto ellas se expresan por medio de V_A, V_B y H, *linealmente*, entonces, sus líneas de influencia pueden ser obtenidas adicionando las líneas de influencia conocidas de V_A, V_B y H, multiplicadas por los respectivos coeficientes de corrección, como esto se desprende de (8.4), por las siguientes expresiones:

$$\text{l.i. de } V_A^* = \text{l.i. de } V_A + (\text{l.i. de } H)\ \operatorname{tg}\beta;$$

$$\text{l.i. de } V_B^* = \text{l.i. de } V_B - (\text{l. i. de } H)\ \operatorname{tg}\beta.$$

§ 74. METODO ESTATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LOS MOMENTOS FLECTORES, LAS FUERZAS AXILES Y LAS FUERZAS TRANSVERSALES EN EL ARCO TRIARTICULADO. Las líneas de influencia de las fuerzas internas se construyen por sus expresiones analíticas generales (8.5)—(8.7). Por cuanto M_k, Q_k y N_k se expresan por medio de M_k^{vig}, Q_k^{vig} y H *linealmente*, entonces, las líneas de influencia de las fuerzas internas pueden ser obtenidas adicionando las l.i. conocidas de M_k^{vig}, Q_k^{vig} y H multiplicadas por los respectivos coeficientes de las expresiones (8.5)—(8.7).

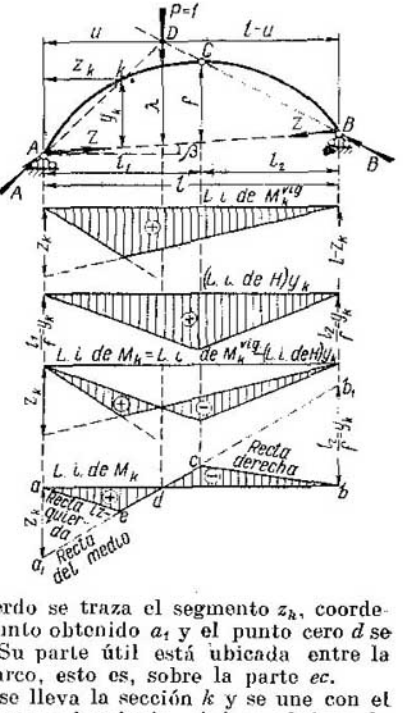
1. LINEAS DE INFLUENCIA DEL MOMENTO FLECTOR (fig. 153)

$$\text{l.i. de } M_k = \text{l.i. de } M_k^{\text{vig}} - (\text{l.i. de } H)\, y_k. \qquad (8.24)$$

La línea de influencia se forma sumando la l.i. del momento flector en la viga simplemente apoyada para la misma sección M_k^{vig} y la l.i. del empuje H multiplicada por y_k. El proceso de construcción y adición de las componentes de la línea de influencia está representado en la fig. 153. Por cuanto el resultado de la suma de rectas es una recta, entonces, la línea de influencia construida sobre la base horizontal está compuesta por tres rectas: la izquierda *ae*, cuya parte útil está ubicada entre el apoyo izquierdo A y el corte; la del medio *ec*, cuya parte útil está ubicada a la derecha del corte, entre la sección y la articulación C; y la derecha *cb*, cuya parte útil está ubicada entre las articulaciones C y B.

La posición de las rectas extremas *ae* y *cb*, por cuanto ellas cortan la base de la línea de influencia por debajo de los apoyos del arco, puede ser determinada por la recta *del medio*, dado que la recta izquierda se corta con ella debajo de la sección y la derecha, debajo de la articulación C. La posición de la recta del medio se determina de que ella posee una ordenada debajo del apoyo izquierdo, igual a la distancia horizontal desde éste hasta la sección y corta la base en el punto *d*. Este último se determina por la posición del peso, para la cual el momento flector, en el corte, es igual a cero. Esta posición se determina por el cruce de las rectas Ak y BC en el

Fig. 153



arco. Evidentemente, si el peso está ubicado sobre la vertical del punto D, entonces, la reacción de apoyo A pasa por el punto k y el momento flector $M_k = 0$.

Todo lo dicho nos conduce a las siguientes reglas de construcción de la línea de influencia del momento flector en una sección de la parte izquierda del arco.

1. El punto cero de la l.i. de M_k se determina debajo del punto de intersección de la recta Ak, trazada a través de la articulación A y el corte k, y la recta BC, trazada por las articulaciones B y C.

2. Debajo del apoyo izquierdo se traza el segmento z_k, coordenada de la sección, y por el punto obtenido a_1 y el punto cero d se traza la recta del medio a_1d. Su parte útil está ubicada entre la sección y la articulación del arco, esto es, sobre la parte ec.

3. Sobre la recta del medio se lleva la sección k y se une con el punto de la base debajo del apoyo izquierdo. Así se obtiene la recta izquierda ae. Luego, sobre la recta del medio se lleva la articulación C y se une con el punto de la base debajo del apoyo derecho. Así se obtiene la recta derecha cb.

La posición analítica del punto cero se encuentra de la semejanza de los triángulos en el esquema del arco:

$$\lambda = \frac{y_k}{z_k}\,u, \qquad \lambda = \frac{f}{l_2}\,(l-u), \qquad \frac{y_k}{z_k}\,u = \frac{f}{l_2}\,(l-u),$$

de donde

$$u = \frac{fl}{l_2\dfrac{y_k}{z_k} + f}. \tag{8.25}$$

2. LINEAS DE INFLUENCIA DE LA FUERZA TRANSVERSAL (fig. 154)

$$\text{l.i. de } Q_k = (\text{l.i. de } Q_k^{vig})\cos\alpha - (\text{l.i. de } H)\,(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{tg}\beta\cos\alpha). \tag{8.26}$$

La línea de influencia de Q_k se obtiene sumando la l.i. de Q_k^{vig} para una misma sección de una viga simplemente apoyada, multi-

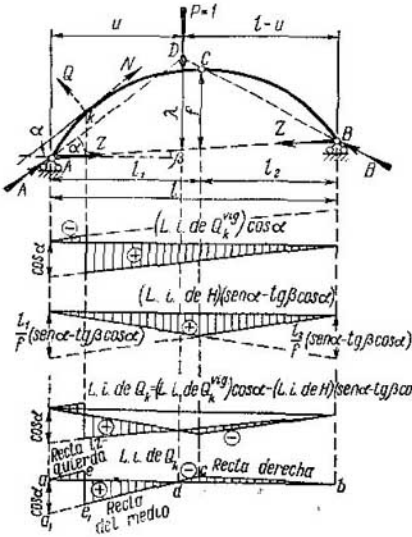


Fig. 154

plicada por el cos α, y la l.i. del empuje H multiplicada por $(-\text{sen}\,\alpha + \text{tg}\,\beta\ \cos\alpha)$.

El proceso de construcción de las componentes de la línea de influencia y la suma de ellas por medio de la superposición y reducción a la base horizontal, se representa en la fig. 154. La línea de influencia de Q_k está compuesta también por tres rectas, las ae, $e_1 c$ y cb. Aquí también las rectas extremas se determinan por la *del medio*. La recta del medio e_1c se determina por el segmento por debajo del apoyo izquierdo $aa_1 = \cos\alpha$ y el punto cero d.

El punto cero se determina por la posición del peso para el cual, en la sección $Q_k = 0$, es decir, cuando la reacción A es paralela a la tangente al arco en el punto k. Dicha posición de la carga se determina por la intersección de la recta AD, paralela a la tangente y la BC, en el esquema del arco. De aquí obtenemos las siguientes reglas de construcción de la línea de influencia de la fuerza transversal Q_k para una sección en la parte izquierda del arco.

1. Se determina el punto cero de la l.i. de Q_k por debajo del punto de intersección de las rectas AD, trazada por la articulación A paralelamente a la tangente en el punto k del arco, y BC que pasa por las articulaciones B y C.

2. Por debajo del apoyo izquierdo se coloca el segmento cos α y por el punto obtenido a_1 y el cero d se traza la recta del medio a_1c. Su parte útil está ubicada entre el corte y la articulación C.

3. Por el punto de la base debajo del apoyo izquierdo, hasta la sección, se traza la recta izquierda, paralela a la recta del medio. Por debajo de la sección, la línea de influencia de Q posee siempre una fractura igual al cos α.

4. Se lleva la articulación C sobre la recta del medio y se une por medio de la recta cb con el punto de la base debajo del apoyo derecho.

La posición analítica del punto cero se determina así:

$$\lambda = u\,(tg\,\alpha - tg\,\beta), \quad \lambda = \frac{f}{l_2}\,(l-u) \text{ y } u\,(tg\,\alpha - tg\,\beta) = \frac{f}{l_2}\,(l-u),$$

de donde

$$u = \frac{fl}{l_2\,(tg\,\alpha - tg\,\beta) + f}. \tag{8.27}$$

3. LINEA DE INFLUENCIA DE LA FUERZA AXIL (fig. 155)

$$\text{l.i. de } N_k = (\text{l.i. de } Q_k^{\text{vig}})\,\text{sen}\,\alpha + (\text{l.i. de } H)\,(\cos\alpha + tg\,\beta\,\text{sen}\,\alpha). \tag{8.28}$$

La línea de influencia de N_k se obtiene sumando la línea de influencia del empuje H multiplicada por (cos α + tg β sen α) y la l.i. de Q_k^{vig}, en una viga simplemente apoyada para la misma sección, multiplicada por sen α. El proceso de construcción de la l.i. de N_k se expone en la fig. 155. También ella está compuesta de tres rectas, las ae, e_1c y cb. La posición de las rectas extremas se determina, también aquí, por la posición de la recta *del medio* e_1c. La posición de esta última se determina por el segmento aa_1 = sen α por debajo del apoyo izquierdo y el punto cero d. Este se obtiene cuando la reacción A, única fuerza aplicada a la parte izquierda del arco, está dirigida perpendicularmente a la tangente en el punto k del arco. La posición de la carga bajo la cual la fuerza N_k en la sección es igual a cero, se determina con la intersección de las rectas AD y BC. La AD es paralela a la normal en el punto k del arco y la BC pasa por las articulaciones B y C.

La posición real de la carga que pasa por el punto D, sólo es posible si la suponemos aplicada a una consola fijada al arco a la derecha de la sección k.

Las reglas de construcción de las l.i. de las fuerzas axiles N_k en las secciones de la parte izquierda del arco son las siguientes.

1. Se determina el punto cero de la l.i. de N_k debajo del punto de intersección de la recta BC, que pasa por las articulaciones B y C y la recta AD trazada por la articulación A del arco perpendicularmente a la tangente en el punto k.

2. Debajo del apoyo izquierdo se traza el segmento sen α y a través del punto obtenido y el punto cero d, la recta del medio a_1c. Su parte útil está ubicada entre la sección y la articulación C.

3. La recta izquierda se traza por el punto de la base debajo del apoyo izquierdo hasta la sección, paralelamente a la recta media. La l.i. de N_k siempre tiene una fractura debajo de la sección, igual a sen α.

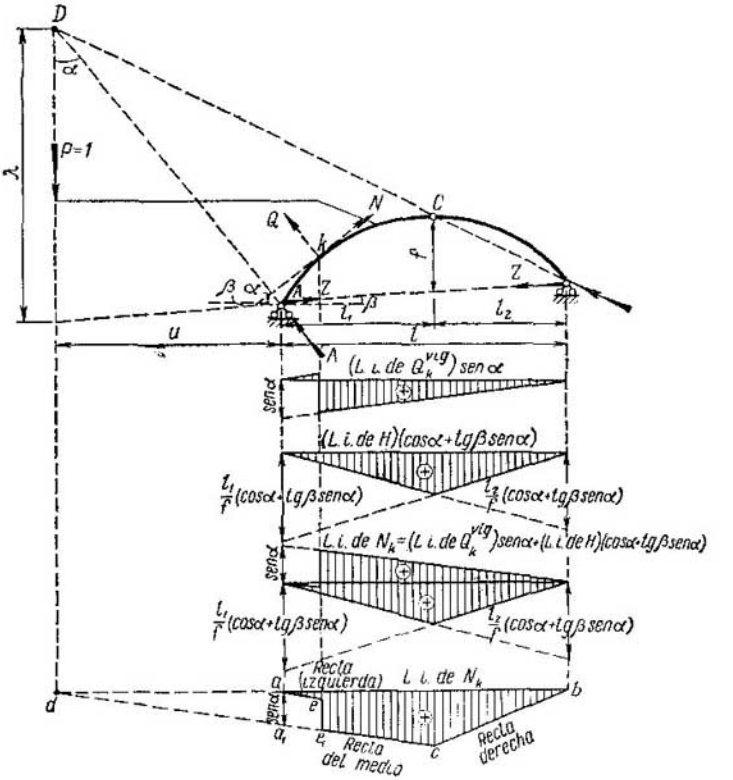


Fig. 155

4. Se lleva la articulación C sobre la recta del medio y, por debajo del apoyo derecho, se une con el cero. De tal modo se obtiene la recta derecha.

La posición analítica del punto cero se determina así:

$$\lambda = u\,(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha); \qquad \lambda = \frac{f}{l_2}(l+u) \text{ y}$$

$$u\,(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha) = \frac{f}{l_2}(l+u),$$

de donde

$$u = \frac{fl}{l_2\,(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha) - f}\,. \tag{8.29}$$

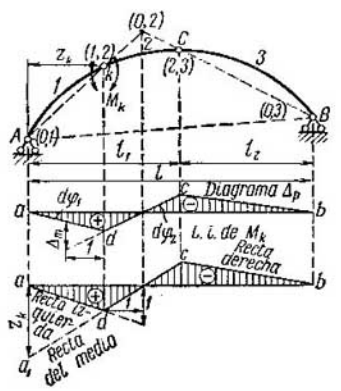
§ 75. METODO CINEMATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LOS MOMENTOS FLECTORES, LAS FUERZAS AXILES Y LAS FUERZAS TRANSVERSALES EN EL ARCO TRIARTICULADO

1. LINEA DE INFLUENCIA DEL MOMENTO FLECTOR

En la fig. 156 se expone un arco con un vínculo desconectado, que permite desplazamientos por la dirección de los momentos flectores M_k. El representa un sistema monovariante. La ecuación de la línea de influencia, por (5.7), es

$$\text{l.i. de } M_k = -\frac{\Delta_P}{\Delta_M}.$$

En el esquema del arco se exponen los centros instantáneos recíprocos de rotación de los discos: $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(0, 3)$. El dis-



Fi6. 15g

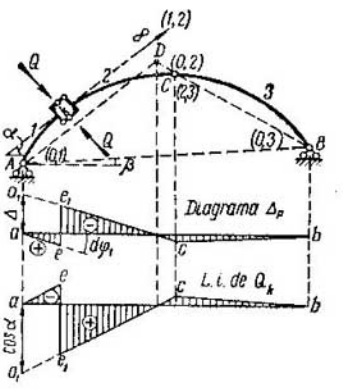


Fig. 157

co *2* está ligado a tierra por medio del par de discos *1* y *3*, los cuales son equivalentes a los dos vínculos de primer tipo, *Ak* y *CB*. Esto significa que el centro instantáneo $(0, 2)$ se encuentra en la intersección de estas rectas.

Construimos el diagrama de los desplazamientos verticales Δ_P. Al primer disco le fijamos un ángulo de giro arbitrario $d\varphi_1$ (la recta *ad*). La línea de desplazamientos del segundo disco corta a la del primero por debajo del centro instantáneo $(1, 2)$ y pasa por el punto de la base por debajo del centro instantáneo $(0, 2)$ (la recta *dc*). La línea de desplazamientos del tercer disco corta a la del segundo por debajo del centro instantáneo $(2, 3)$ y pasa por

el punto de la base por abajo del (*0*, *3*) (la recta *cb*). El diagrama de Δ_P ha sido construido.

La línea de influencia de M_k se distingue de él sólo por la escala de las ordenadas. Del diagrama de Δ_P obtenemos que

$$\Delta_M = d\varphi_1 + d\varphi_2 \approx (\operatorname{tg} d\varphi_1 + \operatorname{tg} d\varphi_2).$$

Esta magnitud puede ser determinada sobre el diagrama de Δ_P si desde el punto d de intersección de las líneas de desplazamientos de los discos primero y segundo se traza horizontalmente un segmento igual a la unidad y se mide la ordenada entre ellas (fig. 156), a la cual, en la línea de influencia de M_k, es necesario tomarla igual a la unidad. Así pues, la ordenada aa_1 seccionada por la línea de traslaciones del segundo disco debajo del apoyo izquierdo, es igual a z_k. Por cuanto $\Delta_M < 0$, el signo de la línea de influencia coincide con el del diagrama de desplazamientos Δ_P. Todo lo dicho nos conduce a aquellas mismas reglas de construcción de la l.i. de M_k que fueron expuestas en el § 74.

2. LINEA DE INFLUENCIA DE LA FUERZA TRANSVERSAL

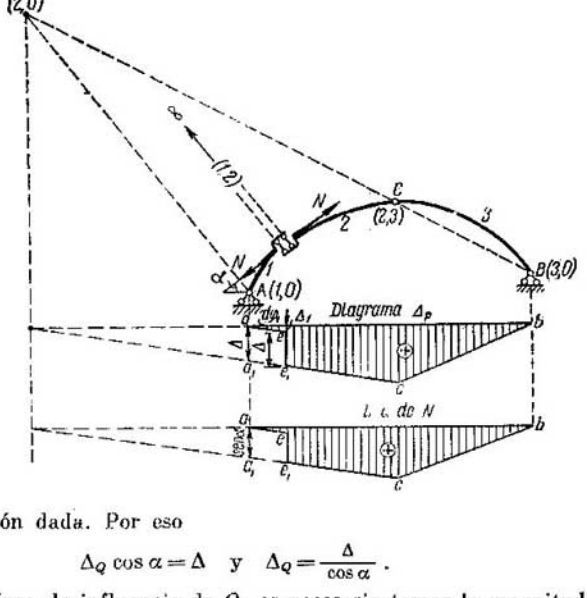
En la fig. 157 se expone un arco con un vínculo desconectado, que permite desplazamiento por la dirección de la fuerza Q_k. El también representa un sistema monovariante. La ecuación de la línea de influencia, por (5.7), es

$$\text{l.i. de } Q_k = -\frac{\Delta_P}{\Delta_Q}.$$

Las posiciones de los centros instantáneos recíprocos de rotación de los discos (*0*, *1*), (*0*, *3*) y (*2*, *3*) son evidentes y no exigen aclaraciones. El centro instantáneo (*1*, *2*) está en el infinito, en la dirección de las dos barras paralelas a la tangente al arco, que unen a los discos *1* y *2*. Entonces, por el teorema de los tres centros instantáneos, el centro instantáneo (*0*, *2*) está sobre la recta paralela a la tangente, trazada por la articulación *A* y sobre la recta que pasa por las articulaciones *B* y *C*.

Para la construcción del diagrama de desplazamientos Δ_P, le fijamos al primer disco un ángulo de giro arbitrario $d\varphi_1$ (la recta *ae*). La línea de desplazamientos del segundo disco deberá cortar a la del primero por debajo del centro instantáneo (*1*, *2*), el cual se halla en el infinito. Esto significa que ella deberá ser paralela a la línea de desplazamientos del primer disco y pasar por el punto de la base por debajo del centro instantáneo (*0*, *2*) (la recta a_1c). La línea de desplazamiento del tercer disco pasará por el punto de la base por debajo del centro instantáneo (*0*, *3*) y cruzará a la del segundo por debajo del (*2*, *3*) (la recta *cb*.) En el diagrama de Δ_P debajo de la sección habrá una fractura igual a Δ. Esta separación es la proyección vertical de la traslación relativa total Δ_Q de los extremos de los discos primero y segundo, por la dirección de la normal al arco

Fig. 158



en la sección dada. Por eso

$$\Delta_Q \cos\alpha = \Delta \quad \text{y} \quad \Delta_Q = \frac{\Delta}{\cos\alpha}.$$

En la línea de influencia de Q_k es necesario tomar la magnitud Δ_Q igual a la unidad. Esto significa que el valor de la fractura es $\Delta = \cos\alpha$. Por cuanto en el caso dado Δ_Q es positivo, ya que la traslación del primero y segundo discos se fijó por la dirección de las fuerzas Q_k, entonces, el signo de la l.i. de Q_k es contrario al del diagrama de traslaciones Δ_P. De esta manera, aquellas mismas reglas de construcción de las l.i., que fueron expuestas en el § 74, se conservan también aquí.

3. LINEA DE INFLUENCIA DE LA FUERZA AXIL

En la fig. 158 se expone un arco con un vínculo desconectado que permite desplazamiento por la dirección de las fuerzas axiles N_k. También en este caso, él representa un sistema monovariante. La ecuación de la línea de influencia es

$$\text{l.i. de } N_k = -\frac{\Delta_P}{\Delta_N}.$$

Los centros instantáneos de rotación $(0, 1)$, $(0, 3)$ y $(2, 3)$ de los discos se encuentran fácilmente. El $(1, 2)$ se halla en el infinito sobre la dirección de las dos barras paralelas a la normal al arco, que unen los discos primero y segundo. Esto significa que el centro instantáneo

(*2*, *0*) debe buscarse en la intersección de la recta BC y la recta trazada de la articulación A paralela a la normal.

Construimos el diagrama de Δ_P. Le fijamos al primer disco un ángulo de giro arbitrario $d\varphi_1$ (la recta *ae*). La línea de desplazamientos del segundo disco deberá cortar a la del primero por debajo del centro instantáneo (*1*, *2*), que se encuentra en el infinito. Esto significa que ella es paralela a la línea de desplazamientos del primer disco y pasa por el punto de la base por debajo del centro instantáneo (*2*, *0*) (la recta a_1c). La línea de traslaciones del tercer disco corta a la del segundo por debajo del centro instantáneo (*2*, *3*) y pasa por el punto de la base por debajo del apoyo derecho, el centro instantáneo (*3*, *0*) (la recta *bc*). El diagrama de Δ_P está construido. Su fractura debajo de la sección Δ es igual a la proyección vertical del desplazamiento relativo Δ_N de los extremos de los discos primero y segundo, por la dirección de la tangente al arco en la sección fijada. Por eso

$$\Delta_N \operatorname{sen} \alpha = \Delta \quad \text{y} \quad \Delta_N = \frac{\Delta}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

En la línea de influencia de N_k es necesario tomar la magnitud Δ_N igual a la unidad, lo que da $\Delta = \operatorname{sen} \alpha$. Por cuanto Δ_N es negativa, dado que el extremo del segundo disco descendió más abajo del primero, entonces, el signo de la l.i. coincide con el del diagrama de Δ_P. De la construcción de la l.i. de N_k expuesta se desprenden las reglas enunciadas en el § 74.

§ 76. LINEA DE INFLUENCIA DE LAS TENSIONES DE BORDE Y DE LOS MOMENTOS NUCLEARES. Las tensiones en las barras de gran curvatura se determinan por las fórmulas (fig. 159):

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{F\rho} + \frac{M}{J'} \cdot \frac{y\rho}{\rho + y}; \qquad \tau = \frac{QS_{\text{sec}}}{J'b} \cdot \frac{\rho^2}{(\rho + y)^2}, \tag{8.30}$$

donde

$$J' = \int_F \frac{\rho y^2 dF}{\rho + y}.$$

La tensión normal comprimente, aquí es considerada positiva y, la fórmula de la tensión tangencial se dedujo para el caso en que no existe carga tangencial [1]).

[1]) Teniendo en cuenta la carga tangencial sobre la superficie de una barra de sección rectangular (fig. 159), la tensión tangencial se determina por la fórmula

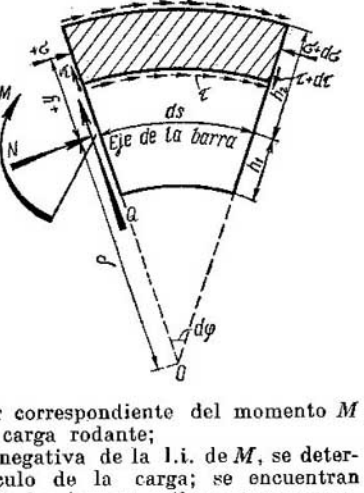
$$\tau = \frac{QS_{\text{sec}}}{J'b} \cdot \frac{\rho^2}{(\rho + y)^2} - \frac{q_t^{\text{sup}}}{b} \cdot \frac{(\rho + h_2)^2}{(\rho + y)^2} \left(1 - \frac{F_{\text{sec}}}{F} - \frac{S_{\text{sec}}}{\rho F}\right) + \\ + \frac{q_t^{\text{sup}} (\rho + h_2) h_2 \rho}{b (\rho + y)^2} \cdot \frac{S_{\text{sec}}}{J'},$$

donde F_{sec} y S_{sec} son la superficie y el momento estático de aquella parte seccionada de la sección en donde está aplicada q_t^{sup}. Esta fórmula se obtiene de la condición de equilibrio $\Sigma M_0 = 0$ de la parte seccionada superior, de la fórmula primera (8.30) y en base a las dependencias diferenciales (17.82)

La solidez del material de los arcos se aprecia frecuentemente por las tensiones normales de borde en los puntos donde $y = h_2$ e $y = -h_1$.

La determinación de las tensiones de borde numéricamente mayores en la sección, debidas a la carga rodante, se complica, porque las líneas de influencia del momento flector y de la fuerza axil tienen distinta configuración, lo cual significa que, para ellos, las posi-

Fig. 159



ciones de cálculo de la carga rodante son también *diferentes*. Por eso, las mayores tensiones de borde debidas a la carga rodante, empleando por separado las líneas de influencia del momento flector y de la fuerza axil, no pueden ser determinadas con exactitud. Sólo podrán ser halladas aproximadamente, lo que a veces se hace. En este caso se obra de la siguiente manera:

1) se determina la posición de cálculo de la carga por la l.i. de N, se encuentra el $N_{máx}$ y el valor correspondiente del momento M para la ubicación dada de la carga rodante;

2) por las partes positiva y negativa de la l.i. de M, se determinan las posiciones de cálculo de la carga; se encuentran $+M_{máx}$ y $-M_{máx}$ y los valores de las fuerzas axiles que corresponden a estas posiciones teóricas de la carga;

3) a continuación, se determinan las tensiones de borde para cada una de estas tres posiciones de cálculo de la carga rodante y de ellas, se eligen las que numéricamente son mayores para cada signo.

Para la determinación *exacta* de los valores máximos de las tensiones de borde, conviene utilizar sus líneas de influencia. Estas pueden ser construidas por las líneas de influencia de N y M, dado que por la expresión (8.30), las tensiones de borde son funciones *lineales* de estas magnitudes.

Los arcos de construcción son, comúnmente, de reducida curvatura $\left(\frac{\rho}{h} > 10\right)$ y en ellos las tensiones normales se pueden determinar por la fórmula para una barra recta (fig. 160):

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M}{W_1}; \qquad \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{M}{W_2}, \tag{8.31}$$

donde

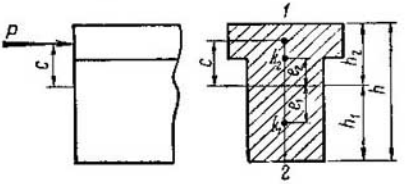
$$W_1 = J : h_2; \quad W_2 = J : h_1.$$

Correspondientemente, las líneas de influencia de las tensiones de borde serán:

$$\text{l.i. de } \sigma_1 = \frac{\text{l.i. de } N}{F} + \frac{\text{l.i. de } M}{W_1}; \qquad \text{l.i. de } \sigma_2 = \frac{\text{l.i. de } N}{F} - \frac{\text{l.i. de } M}{W_2}. \tag{8.32}$$

Estas se obtienen de dos líneas de influencia: de la línea de influencia de la fuerza axil N dividida por el área de la sección y de

Fig. 160



la del momento flector M dividida por el correspondiente momento de resistencia.

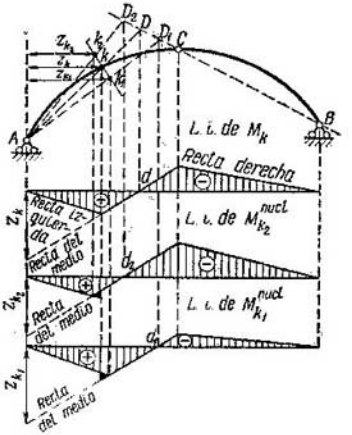
Expresemos las tensiones de borde por medio de los momentos nucleares (fig. 160). Es conocido que

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \frac{W_1}{F}; \qquad e_2 = \frac{W_2}{F}; \\ \sigma_1 &= \frac{P}{F} + \frac{Pc}{W_1} = \frac{P}{W_1}(e_1 + c) = M_{h_1}^{\text{nucl}} : W_1; \\ \sigma_2 &= \frac{P}{F} - \frac{Pc}{W_2} = -\frac{P}{W_2}(-e_2 + c) = -M_{h_2}^{\text{nucl}} : W_2. \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

Estas expresiones permiten utilizar las líneas de influencia de los momentos nucleares en vez de las líneas de influencia de las tensiones de borde. Las l.i. de los momentos nucleares también se construyen por las mismas reglas que las líneas de influencia del momento central, sólo con la diferencia de que las rectas izquierda y media se cortarán por debajo del correspondiente punto *nuclear* y sus partes útiles se extenderán hasta la vertical que pasa por el punto central de la sección (fig. 161). Hablando en general, debajo de este punto, en las l.i. de los momentos nucleares $M^{\text{nucl}} = \frac{W}{F} N \pm M$, hay discontinuidades, por cuanto allí tiene lugar la fractura de la l.i. de N.

Por cada una de las líneas de influencia de los momentos nucleares, para calcular los $+M_{\max}^{\text{nucl}}$ y $-M_{\max}^{\text{nucl}}$, se determinan dos posiciones de cálculo de la carga. Después de esto, por las fórmulas (8.33) se calculan las tensiones σ_1 y σ_2 para cada posición de cálculo. En este caso, es necesario tener en cuenta que los momentos positivos,

Fig. 161

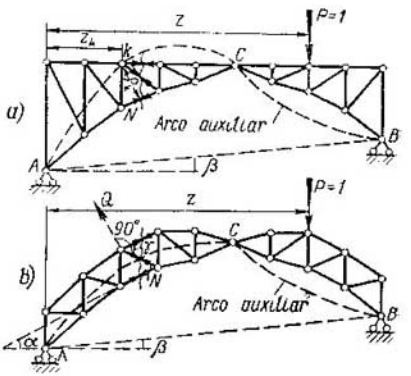


aplicados a la parte derecha del arco, están dirigidos en sentido de las agujas del reloj y, correspondientemente, las tensiones comprimentes positivas se hallan sobre el borde externo del arco.

En base a lo expuesto se puede hacer también una deducción más general: *si en cualquier sistema, las tensiones de cálculo dependen linealmente de la fuerza axil y del momento flector, entonces siempre, cuando esto es posible, es conveniente emplear las líneas de influencia de las mismas tensiones o las de los momentos nucleares y no las de M y N por separado.*

§ 77. METODO ESTATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS FUERZAS AXILES EN LAS BARRAS DE LAS ARMADURAS EN ARCO. Las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras de las armaduras

Fig. 162



en arco pueden ser construidas por el procedimiento de las secciones. Si con el corte en la armadura se seccionan sólo tres barras, incluida aquella para la cual se construye la línea de influencia, entonces, con el objeto de construirla, se compone la condición de equilibrio en forma de la

suma de los momentos de las fuerzas con respecto al punto k, que está sobre la intersección de las otras dos barras seccionadas (fig. 162, *a*). Esta condición de equilibrio, para el peso $P = 1$ se puede escribir en la forma general siguiente:

$$\Sigma M_k = M_k \pm N_{izq}\ \rho_k = 0, \quad \text{de aquí } N = \mp \frac{M_k}{\rho_k}, \qquad (8.34)$$

donde M_k es el momento flector en cierto arco auxiliar imaginario de contorno arbitrario, pero que obligatoriamente atraviesa uno tras otro a todos los puntos A, k, C y B de la armadura en arco (fig. 162, *a*);

ρ_k, el brazo de la fuerza axil determinada N, con respecto al punto de momento.

El signo superior se emplea cuando el momento de la fuerza positiva, a la izquierda del corte, N_{izq} respecto al punto k, está dirigido en sentido de las agujas del reloj. De acuerdo a (8.34) podemos escribir que

$$\text{l.i. de } N = \mp \frac{\text{l.i. de } M_k}{\rho_k}.$$

De donde se desprende que la línea de influencia de la fuerza axil N, puede ser expresada por medio de la línea de influencia del momento M_k en el arco auxiliar de contorno arbitrario que pasa por los puntos A, k, C y B de la armadura en arco. A esta línea de influencia es necesario dividirla por ρ_k, siendo que aquí serán un poco otros los límites de sus partes útiles. La parte útil de la recta izquierda, cuando el peso se encuentra a la izquierda del primer nudo del cordón de carga, izquierdo con respecto al corte, se extiende hasta la articulación A; la parte útil de la recta del medio, para el peso a la derecha del primer nudo del cordón de carga, derecho con respecto a la sección, hasta la articulación C y, por fin, la parte útil de la recta derecha está ubicada entre las articulaciones C y B. La división por ρ_k de la l.i. de M_k, se puede llevar a cabo inmediatamente trazando, durante su construcción, un segmento igual a $\mp \frac{z_k}{\rho_k}$ por debajo del apoyo izquierdo.

El orden de construcción de la línea de influencia de las fuerzas axiles en las barras de la parte izquierda de la armadura es el siguiente:

1) se efectúa el corte por la barra para cuya fuerza axil se determina la línea de influencia y por las otras dos, en la intersección de las cuales se sitúa el punto de momento k;

2) a través de los puntos A, k, C y B se traza un arco *auxiliar* de contorno arbitrario;

3) se determina la dirección del momento de la fuerza positiva N_{izq} aplicada a la parte izquierda de la armadura, respecto al punto de momento k;

4) por las reglas ya conocidas se construye la línea de influencia del momento flector M_k en el arco auxiliar, dividida por ρ_k.

Para esto es indispensable:

a) determinar la posición del punto cero por debajo del punto de intersección de las rectas Ak y BC;

b) trazar por debajo del apoyo izquierdo el segmento $\mp \frac{z_k}{\rho_k}$, donde z_k, contada desde el apoyo A hacia la derecha, es la abscisa del punto de momento y ρ_k, con respecto a este último, el brazo de la fuerza N. El signo superior se emplea cuando el momento de la fuerza positiva N_{izq}, aplicado a la parte izquierda, está dirigido en sentido de las agujas del reloj. Luego, por el punto obtenido y el punto cero, trazar la recta *del medio*. La relación $\frac{z_k}{\rho_k}$ se determina por las expresiones (7.15)—(7.17);

c) llevar el punto de momento sobre la recta del medio y unirlo por medio de otra recta con el punto de la base por debajo del apoyo izquierdo. Esta recta es la recta *izquierda* de la línea de influencia;

d) llevar sobre la recta del medio la articulación C y unirla con el punto de la base por debajo del apoyo derecho. Esta recta es la recta *derecha* de la línea de influencia;

e) determinar los límites de las partes útiles de las rectas. La de la recta izquierda se ubica más a la izquierda del primer nudo izquierdo, respecto al corte, del cordón carguero; la de la recta del medio, a la derecha del primer nudo del cordón carguero, derecho con respecto al corte, hasta la articulación C y la de la recta derecha, desde la articulación C hasta la B.

La condición de equilibrio, en el caso cuando las otras dos barras seccionadas son paralelas (fig. 162, *b*), se puede escribir en forma de la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje Q, perpendicular a ellas:

$$\sum Q = Q \pm N_{izq} \operatorname{sen} \gamma = 0,$$

de donde

$$N = \mp \frac{Q}{\operatorname{sen} \gamma}, \tag{8.35}$$

donde Q es la fuerza transversal en el arco auxiliar, que pasa por las articulaciones A, C y B, y posee obligatoriamente, en el sitio del panel seccionado de la armadura, una parte paralela a las dos barras paralelas seccionadas; γ es el ángulo de inclinción de aquella barra, cuya fuerza axil se determina, a las dos barras paralelas seccionadas.

El signo superior se emplea cuando la proyección N sen γ, de la fuerza N_{izq} aplicada a la parte izquierda, sobre el eje Q en el arco (v. fig. 144), es positiva.

En base a (8.35)

$$\text{l.i. de } N = \mp \frac{\text{l.i. de } Q}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

Por consiguiente, en este caso, la línea de influencia de la fuerza axil N, puede ser expresada por la línea de influencia de la fuerza transversal, en el arco auxiliar, en aquella misma sección, donde pasa

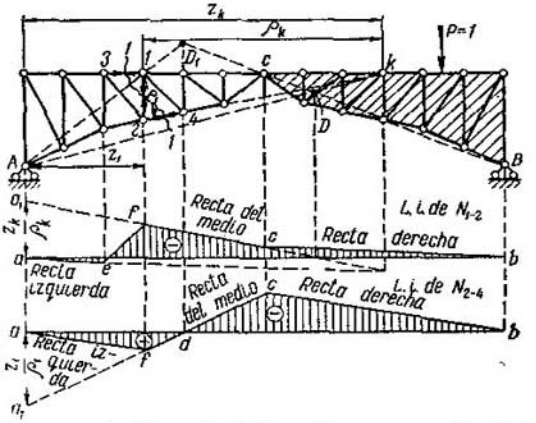


Fig. 163

el corte en la armadura; a esta línea de influencia es necesario dividirla por sen γ.

El orden de construcción de las l.i. expuesto anteriormente se conserva también aquí. Sólo que ahora, la recta *Ak* deberá ser paralela a la tangente al arco auxiliar, esto es, a las dos barras paralelas de la armadura y, por debajo del apoyo izquierdo deberá ser trazado el segmento $\mp \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \gamma}$.

Seguiremos todo lo dicho sobre ejemplos. Construimos la línea de influencia de las fuerzas axiles en las barras *1-2* y *2-4* (fig. 163).

Para la construcción de la línea de influencia de N_{1-2} trazamos por tres barras el corte *1-1*. El punto de momento *k* lo elegimos en la intersección de las barras *1-3* y *2-4*. El punto cero *d* de la l.i. lo hallaremos debajo del punto *D* de intersección de las rectas *Ak* y *CB*. Por cuanto el momento $N_{1-2}^{\text{izq}} \rho_k$ de la fuerza positiva, aplicado a la parte izquierda de la armadura, está dirigido en sentido de las agujas del reloj, entonces, por debajo del apoyo izquierdo trazamos el segmento $-\frac{z_k}{\rho_k}$ y, por el punto cero de la l.i., la recta media $a_1 d$. Sobre ella bajamos el punto *k* y, por debajo del apoyo izquierdo, lo unimos con el punto de la base (la recta *ae*). Sobre ella misma llevamos la articulación *C* y, por debajo del apoyo derecho, la unimos con el punto de la base (la recta *bc*). Sobre la recta del medio bajamos el nudo *1* (punto *f*) y sobre la izquierda, el *3* (punto *e*). A estos puntos los unimos con la recta *ef*. Para la línea de influencia de N_{2-4} la sección *1-1* se conserva. El punto de momento *1* lo elegimos en la intersección de las barras *1-2* y *1-3*. El punto cero de la l.i. lo encontraremos por debajo del punto D_1 de intersección de las rectas *A1* y *CB*. El momento de la fuerza positiva N_{2-4}^{izq}, aplicado a la parte izquierda,

Fig. 164

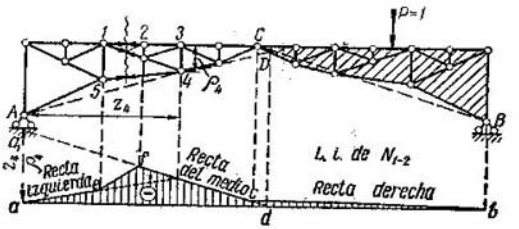
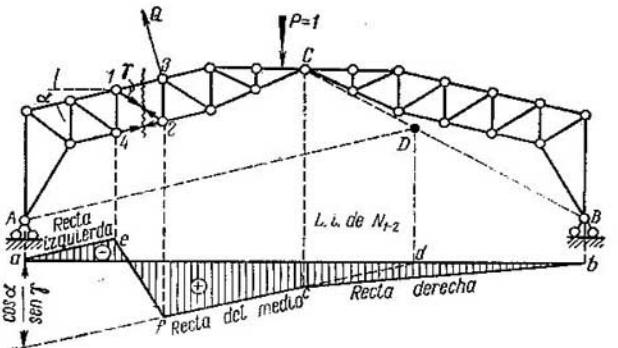


Fig. 165

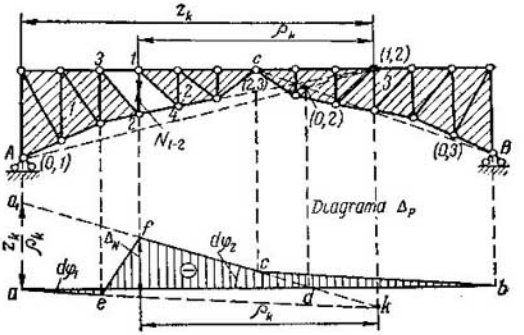


está dirigido en sentido contrario a las agujas del reloj, esto significa que, por debajo del apoyo A es necesario trazar el segmento $+\frac{z_1}{\rho_1}$. Por este punto y el cero trazamos la recta del medio a_1d. Sobre ella llevamos el punto de momento *1* y lo unimos con el punto de la base por debajo del apoyo izquierdo (la recta izquierda *af*). Sobre ella misma bajamos la articulación C y la unimos con el punto de la base por debajo del apoyo derecho (la recta derecha *cb*). Sobre la recta izquierda bajamos el nudo *3* y sobre la del medio, el *1*. La línea de influencia está construida.

En este mismo orden se construye la l.i. de N_{1-2} (fig. 164).

Construyamos ahora la l.i. de N_{1-2}, cuando el punto de momento está alejado al infinito (fig. 165). Supongámoslo situado a la derecha. El momento N_{1-2}^{izq} de la fuerza aplicada a la parte izquierda, respecto al punto de momento, está dirigido en sentido contrario a las agujas del reloj. Debajo del apoyo izquierdo, en base a (7.18), es necesario trazar el segmento $\pm\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}$. El punto cero se encontrará debajo del punto de intersección de la recta AD, trazada desde el punto A paralelamente a las barras *1-3* y *2-4*, con la recta BC. La a_1d es la recta del medio. Paralela a ésta se traza la recta izquierda *ae*.

Fig. 166



Sobre la recta del medio bajamos el nudo C y, por debajo del apoyo derecho, lo unimos con el punto de la base (la recta cb). Sobre la recta izquierda llevamos el nudo izquierdo *1* y sobre la del medio, el *3* y, a estos puntos los unimos con la recta ef.

§ 78. METODO CINEMATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS FUERZAS AXILES EN LAS BARRAS DE LAS ARMADURAS EN ARCO. El método cinemático es muy cómodo para la construcción de las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras de armaduras en arco, dado que en el sistema transformado, al quitarle una barra, es muy simple la determinación de los centros instantáneos de rotación de tres discos. Los centros instantáneos de rotación de los discos unidos a tierra por los apoyos A y B coinciden con estos apoyos. El centro instantáneo del segundo y tercer discos (fig. 166) se encuentra en la articulación C. El del primero y segundo, en la intersección de las dos barras que unen estos discos. Por fin, el centro instantáneo del segundo disco, con respecto a la tierra, en correspondencia con el teorema sobre los tres centros instantáneos, se encuentra en la intersección de las rectas A (*1*, *2*) y BC.

La ecuación general de la línea de influencia (véase 5.7), es

$$\text{l.i. de } N = -\frac{\Delta_P}{\Delta_N}.$$

El diagrama de desplazamientos Δ_P se obtiene de la siguiente manera.

Al primer disco se le impone un desplazamiento arbitrario $d\varphi_1$ (la recta ae). La línea de desplazamiento del segundo disco deberá pasar por debajo del centro instantáneo (*0*, *2*), por el punto cero d, y cortar la línea de desplazamiento del primer disco por debajo del centro instantáneo (*1*, *2*), en el punto k. La línea de desplazamiento del tercer disco pasará por el punto de la base debajo del apoyo derecho con el centro instantáneo (*0*, *3*) y cruzará la línea de desplaza-

miento del segundo por debajo de la articulación C (*2*, *3*). Luego, sobre las líneas de traslaciones de los discos primero y segundo, bajamos los correspondientes nudos *1* y *3* del cordón de carga de la armadura y, los puntos e y f obtenidos, los unimos con una recta.

La magnitud Δ_N se halla como el segmento vertical entre las líneas de desplazamientos del primero y segundo discos, medido a la distancia ρ_k del punto de intersección de estas líneas en el diagrama de traslaciones Δ_P, donde ρ_k es la longitud de la perpendicular bajada desde el centro instantáneo (*1*, *2*) sobre la dirección de la fuerza axil buscada. Esta magnitud Δ_N debe tomarse en la línea de influencia igual a la unidad. Si $\Delta_N < 0$, el signo de la línea de influencia coincide con el del diagrama de desplazamientos y viceversa. Por estas reglas fue construida la línea de influencia de N_{1-2}. El signo de Δ_N se determina así: en el desplazamiento imprimido Δ_P con respecto al primer disco, el segundo disco gira alrededor del centro instantáneo (*1*, *2*), en sentido de las agujas del reloj y, esto significa que el nudo *1* se eleva o, al revés, el primer disco gira con relación al segundo en sentido contrario a las agujas del reloj y el nudo *2* desciende. En ambos casos, la distancia entre los nudos *1* y *2* aumenta. Por consiguiente, la magnitud Δ_N es negativa y el signo de la línea de influencia coincide con el del diagrama de desplazamientos Δ_P.

De la semejanza de los triángulos no es difícil hallar la ordenada $aa_1 = -\frac{z_k}{\rho_k}$ de la recta del medio, por debajo del apoyo izquierdo.

Si dos barras entre los discos primero y segundo resultan paralelas (l.i. de N_{1-2}, fig. 165), entonces, debajo del apoyo izquierdo, la escala de la línea de influencia y la ordenada de la línea de desplazamientos del segundo disco se pueden determinar pasando al límite, alejando el centro instantáneo (*1*, *2*) al infinito, como se hizo al deducir las fórmulas (5.9a) y (7.18).

§ 79. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO Y DE LAS FUERZAS (INTERNAS) SUSTITUYENTES EN LOS ARCOS Y EN LAS ARMADURAS EN ARCO CON CONSOLAS. Las líneas de influencia de las reacciones de los apoyos de la viga en los arcos y en las armaduras en arco con consolas, son las mismas que en las vigas cantilever (fig. 167). Las líneas de influencia de las fuerzas internas en la parte entre los apoyos de los arcos y armaduras en arco, se construyen por las mismas reglas que se usan en los arcos y armaduras en arco sin consolas. Sólo que aquí, la recta izquierda deberá ser prolongada hasta el final de la consola izquierda y, la derecha, hasta el final de la consola derecha.

En la fig. 167 se dan las líneas de influencia de M y Q. Estas fueron construidas, al principio, sin tomar en cuenta a las vigas complementarias D_1—D_2 y E_1—E_2, siendo luego corregidas por las reglas usuales. Las ordenadas de cada una de ellas por debajo del punto D_1 fueron unidas con el punto de la base por debajo del punto

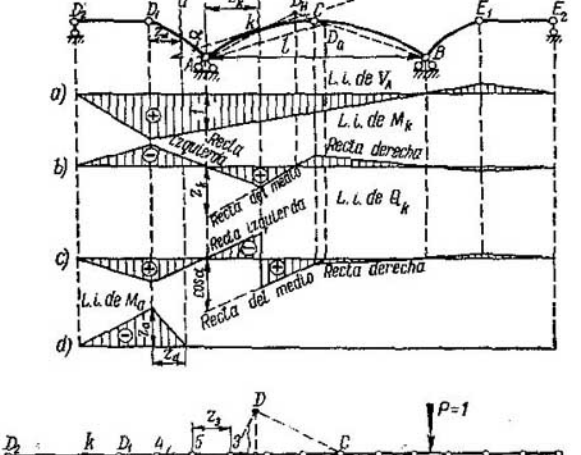


Fig. 167

Fig. 168

D_2 y, las ordenadas por debajo del punto E_1 con el punto de la base por debajo del E_2. Las líneas de influencia de las fuerzas internas en las partes voladizas, se construyen por las mismas reglas de construcción que rigen para ellas en las consolas. En la fig. 167, *d* se expone la línea de influencia del momento flector en la sección de la consola izquierda.

En la fig. 168 se dan las líneas de influencia de las fuerzas axiles de las barras en las partes voladizas y entre apoyos de la armadura. La construcción de éstas en el dibujo es clara y no exige explicaciones.

§ 80. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO Y DE LAS FUERZAS SUSTITUYENTES (INTERNAS) EN LOS SISTEMAS COLGANTES. Los sistemas colgantes continuos, para carga vertical dirigida hacia abajo, trabajan a la flexotracción. Si las direcciones de las reacciones de apoyo y de las otras

magnitudes expuestas en la fig. 169 se toman positivas, entonces, el cálculo de los sistemas colgantes se hace por las fórmulas y reglas expuestas para los sistemas en arco. La cuestión radica en que durante el vuelco del sistema y un simultáneo cambio de la dirección de Z_A y Z_B, todas las fórmulas y reglas de los sistemas en arco se conservan, sólo la de los signos, para la fuerza axil, deberá ser modificada con la inversa. Así, por ejemplo, en la fig. 169 se expone, para un sistema colgante, la construcción de las líneas de influencia del

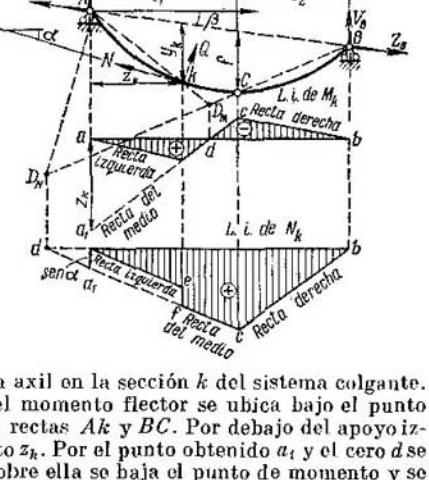


Fig. 169

momento flector y la fuerza axil en la sección k del sistema colgante. El punto cero de la l.i. del momento flector se ubica bajo el punto D_M de intersección de las rectas Ak y BC. Por debajo del apoyo izquierdo se traza el segmento z_k. Por el punto obtenido a_1 y el cero d se traza la recta del medio. Sobre ella se baja el punto de momento y se traza la recta izquierda. Sobre esta misma recta se baja la articulación C y se traza la recta derecha. Análogamente se construye la l.i. de la fuerza axil N. El punto cero queda por debajo del punto D_N de intersección de la recta AD_N, perpendicular a la tangente del arco en el punto k, y la recta BC. La recta izquierda se traza paralela a la del medio.

En la fig. 170 se muestra la construcción de la línea de influencia de la fuerza axil en la barra *1-2* de la armadura. Al principio la l.i. fue construida sin tomar en cuenta la trasmisión nodal del peso por la línea de carga (fig. 170, *b*). El punto cero queda bajo el punto de interseccción de las rectas $A3$ y BC. Por debajo del apoyo izquierdo se traza el segmento $-\frac{z_3}{\rho_3}$, dado que el momento de la fuerza positiva N^{izq}_{1-2} con respecto al punto de momento *3* está dirigido en sentido de las agujas del reloj. Por el punto obtenido y el cero pasará la recta del medio. Sobre ella bajamos el punto de momentos *3* y lo

unimos con el de la base por debajo del apoyo izquierdo (la recta izquierda). Sobre ella misma bajamos la articulación C y la unimos con el punto de la base por debajo del apoyo derecho (la recta derecha). Sobre la recta izquierda bajamos el nudo *5* y sobre la del medio el *3*. Los puntos resultantes los unimos con una recta. Después, efectuamos la corrección de la línea de influencia obtenida, debida a la transmisión nodal. Para esto bajamos sobre ella los puntos nodales $m_0, m_1, \ldots, m_5$ y los puntos obtenidos los unimos con segmentos.

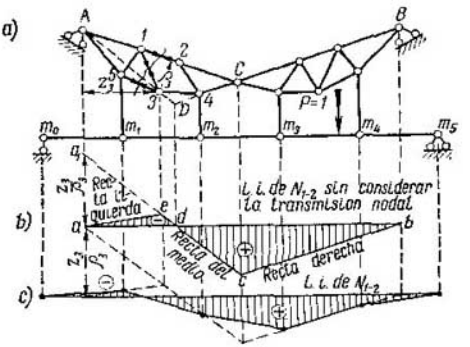


Fig. 170

§ 81. CALCULO DE ARMADURAS DE CABLE. Se llaman armaduras de cable a las armaduras colgantes invariantes, todas las barras de las cuales se preparan de elementos flexibles (por ejemplo, de cables de alambre), capaces de trabajar sólo a la tracción. Debido a esto, la configuración de los cordones y enrejados de las armaduras no puede ser arbitraria. Ellos deberán asegurar el servicio de todas las barras de la armadura a la tracción para cualquier posición de la carga de cálculo.

Si la carga de cálculo permanente, igual a la carga normativa o de servicio q^n multiplicada por el coeficiente de sobrecarga k, que en este caso debe tomarse menor de la unidad, y la carga de cálculo accidental $k_1 p^n$ con el coeficiente de sobrecarga $k_1 > 1$, para simplificar se presentan en forma de cargas uniformemente repartidas, entonces, la condición de trabajo a la tracción de cada elemento de la armadura de cable se escribe así:

$$kq^n(\omega_1 - \omega_2) - k_1 p^n \omega_2 \geqq 0, \tag{8.36}$$

donde ω_1 y ω_2 son los valores absolutos de las áreas de las partes positiva y negativa de las líneas de influencia de las fuerzas axiles del elemento examinado.

Las armaduras de cable poseen las siguientes ventajas:

1) no existen barras que trabajan a la compresión, que exigen la disminución de las resistencias teóricas a consecuencia de la

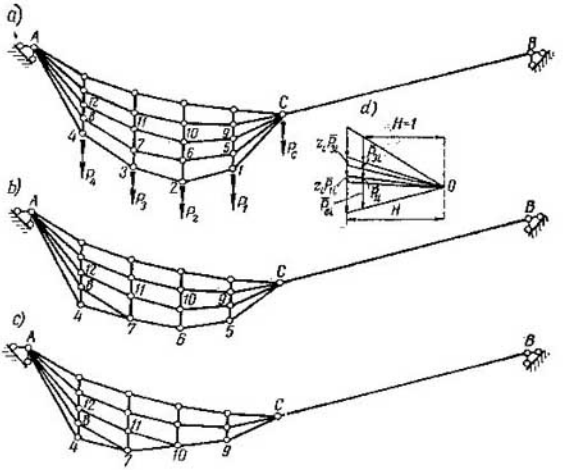


Fig. 171

flexión longitudinal, lo que permite utilizar cables con elevada resistencia;

2) los elementos flexibles en considerable medida acercan este tipo de armaduras a las articuladas:

3) no existen debilitaciones en las barras debidas a los agujeros de los remaches;

4) las uniones nodales exigen poco consumo de material.

Todo esto conduce a una disminución de la cantidad de material, exigida para la confección de las armaduras de cable, como resultado de lo cual, éstas resultan más ligeras que las de barras. De la armadura multicordonal, examinada por el prof. J. M. Rabinovich, pueden ser obtenidas muchas clases de armaduras de cable (fig. 171). El mismo propuso el método para calcularlas.

Examinando a la barra CB como de apoyo, podemos establecer la dependencia entre el número m de lados del cordón y el número n de cordones. La cantidad de barras en la armadura izquierda es $D = mn + (m-1)(n-1)$. La de nudos $N = 2 + n(m-1)$.

La condición indispensable de invariabilidad de la armadura $2N = D + 3$ adopta la forma

$$2(2 + mn - n) = mn + (m-1)(n-1) + 3,$$

de donde obtenemos que

$$n = m. \tag{8.37}$$

El número de lados en cada cordón de la media-armadura izquierda es igual al número de cordones. Si sucesivamente quitamos los nudos

con dos barras, la condición (8.37) no cambia. Así pueden ser eliminados los nudos *1*, *2* y *3* (fig. 171, *b*). En la armadura transformada quedarán, como antes, cinco cordones, sólo que algunas barras del quinto cordón ahora se fusionaron con las del cuarto. El cuarto nudo no puede ser eliminado, puesto que la armadura resultaría variante. Siguiendo, podemos eliminar los nudos *5* y *6* (fig. 171, *c*). En la nueva armadura, algunas barras de los cordones cuarto y quinto se fusionaron con las del tercero. De aquí se ve la posibilidad de obtener otras armaduras de la armadura poseedora de un juego completo de cordones.

Por cuanto todas las barras de los cordones son flexibles, entonces, cada cordón puede soportar sobre sí, lo mismo que un polígono funicular, una carga concretamente determinada según sea su configuración, independientemente de la carga que actúa sobre toda la armadura. Esta última se distribuye entre los cordones de acuerdo a sus configuraciones. En esto se basa el cálculo de las armaduras de cable de muchos cordones.

Si la carga actuante sobre la armadura es tal, que el polígono funicular, para la misma, coincide con uno de sus cordones, entonces, sólo trabajará este cordón y los restantes no. Para el cálculo de la armadura, construimos n polígonos de fuerzas correspondientes a cada uno de los cordones. Para ello, desde un centro arbitrario O trazamos los rayos paralelos a los lados del i-ésimo polígono (fig. 171, *d*), incluido el correspondiente al tirante CB. Luego, marcamos la distancia polar $\dot{H}$ igual a la unidad e indicamos las fuerzas $\overline{P}_{ki}$ correspondientes a los nudos de este cordón. El índice k señala el número [1]) del nudo y el i el del cordón. En realidad, nosotros no conocemos aún las fuerzas que han de soportar cada nudo del cordón dado, pero ellas son proporcionales a las fuerzas $\overline{P}_{ki}$ encontradas siendo $H = 1$. Tomemos el coeficiente z_i como magnitud desconocida por la que es necesario multiplicar la fuerza $\overline{P}_{ki}$ para obtener la fuerza que actúa sobre el nudo del cordón dado de la armadura. Ahora sumamos todas las fuerzas actuantes sobre los nudos k-ésimos de todos los cordones, y su suma la igualamos a la carga que actúa sobre este nudo de la armadura (fig. 171, *a*):

$$\left.\begin{aligned} z_1\overline{P}_{11} + z_2\overline{P}_{12} + \ldots + z_m\overline{P}_{1m} &= P_1; \\ z_1\overline{P}_{21} + z_2\overline{P}_{22} + \ldots + z_m\overline{P}_{2m} &= P_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ z_1\overline{P}_{m1} + z_2\overline{P}_{m2} + \ldots + z_m\overline{P}_{mm} &= P_m. \end{aligned}\right\} \qquad (8.38)$$

Para la determinación de todos los coeficientes incógnitos de proporcionalidad z_i hemos obtenido una cantidad de ecuaciones

[1]) Idéntico para los nudos de todos los cordones ubicados en una misma vertical.

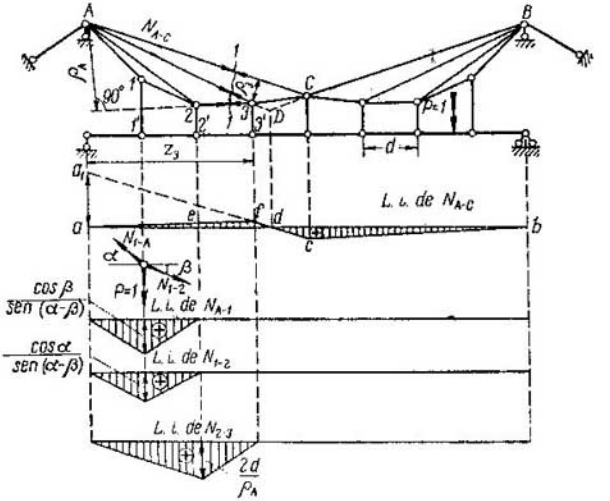


Fig. 172

suficiente. A continuación, la cuestión de calcular las fuerzas axiles en las barras de la armadura puede considerarse resuelta, dado que ellas se determinan de los polígonos de fuerza para $H = 1$, a las cuales es necesario multiplicar por los coeficientes de proporcionalidad hallados. Al construir las líneas de influencia, es necesario colocar la carga $P = 1$ sucesivamente en todos los nudos de la armadura, lo cual modificará sólo al segundo miembro de la ecuación (8.38). En aquellos casos cuando es posible trazar una sección por tres barras, las líneas de influencia de las fuerzas axiles en los cables pueden construirse por las reglas para las armaduras triarticuladas. Así, por ejemplo, la línea de influencia de la fuerza axil en la barra AC (fig. 172) puede ser construida utilizando la sección *1-1* y el punto de momento *3*. El punto cero d se sitúa por debajo de la intersección de las rectas $A3$ y BC. Por debajo del apoyo izquierdo trazamos el segmento $-\frac{z_3}{\rho_3}$ (el punto a_1) y por el punto cero d la recta media $a_1 d$. Sobre esta recta bajamos el punto de momento *3* y, uniéndolo con el de la base, por debajo del apoyo izquierdo, obtenemos la recta izquierda. Sobre la misma recta bajamos la articulación C y, uniéndola con el punto de la base por debajo del apoyo derecho, obtenemos la recta derecha. Sobre la recta izquierda bajamos el nudo *2*, sobre la derecha el *3*, y trazamos la recta de unión.

Recortando el nudo *1* podemos construir las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras *A-1* y *1-2*. Cuando el peso se encuentra fuera del nudo *1*, las fuerzas N_{A-1} y N_{1-2} son iguales a cero.

Cuando el peso se encuentra en el nudo, éstas son iguales a:

$$N_{A-1} = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}, \qquad N_{1-2} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}.$$

Las líneas de influencia de estas fuerzas sólo se extienden dentro de los límites de los dos primeros paneles. La l.i. de N_{2-3} puede ser construida utilizando la sección *1-1* y el punto de momento A, donde $z = 0$. Esto significa que la recta del medio coincide con la base. La recta izquierda pasa por el punto de la base por debajo del apoyo izquierdo. Sobre la recta izquierda bajamos el nudo *2* y sobre la del medio el *3*. La ordenada de la línea de influencia debajo del nudo *2* la determinamos así: colocamos el peso $P = 1$ sobre el nudo *2* y examinamos el equilibrio de la parte izquierda

$$\sum M_A = -N_{2-3}\rho_A + 1 \cdot 2d = 0,$$

de donde

$$N_{2-3} = \frac{bd}{\rho_A}.$$

CAPITULO IX * CALCULO DE SISTEMAS MIXTOS PLANOS ESTATICAMENTE DETERMINADOS

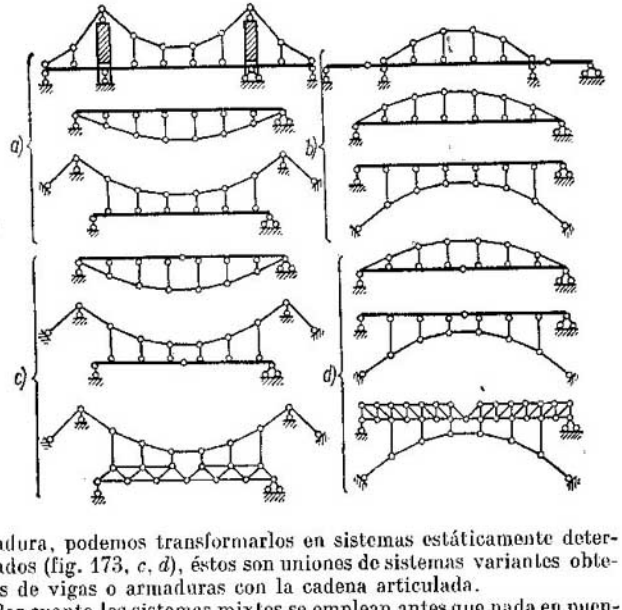
§ 82. SISTEMAS MIXTOS. Los sistemas mixtos son sistemas invariantes compuestos de dos o de varios sistemas (de vigas simples y articuladas, de arcos, de armaduras de viga y en arco, de pórticos, de cadenas de barras y discos articuladas, etc.), unidos entre sí, para un trabajo en conjunto, con vínculos complementarios.

Nosotros nos limitaremos a examinar, por ser los más frecuentemente encontrados, los sistemas mixtos integrados con vigas y armaduras de viga unidas a una cadena articulada (fig. 173).

A los sistemas mixtos, en los cuales la viga o la armadura está reforzada con una cadena articulada que, en el caso de carga vertical dirigida hacia abajo, trabaja a la tracción, los llamaremos *colgantes* (fig. 173, *a*, *c*), y a los sistemas en los cuales la viga o la armadura está reforzada con una cadena que trabaja a la compresión, los llamaremos *en arco* (fig. 173, *b*, *d*).

Las vigas y armaduras reforzadas con una cadena pueden ser de uno y de varios tramos, estáticamente determinadas o indeterminadas. La unión de la cadena articulada a las vigas o a las armaduras significa la introducción de un vínculo, debido a lo cual, el grado de indeterminabilidad estática del sistema aumenta en una unidad. Tales sistemas mixtos son siempre estáticamente indeterminados. Eliminando de ellos los vínculos superfluos, por ejemplo, con la introducción de articulaciones en la viga y exclusión de barras en la

Fig. 173



armadura, podemos transformarlos en sistemas estáticamente determinados (fig. 173, *c*, *d*), éstos son uniones de sistemas variantes obtenidos de vigas o armaduras con la cadena articulada.

Por cuanto los sistemas mixtos se emplean antes que nada en puentes, examinaremos el cálculo de ellos bajo carga móvil. Consideraremos que para el sistema, aproximadamente, es correcto el principio de independencia de acción de las fuerzas.

§ 83. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO Y DE LAS FUERZAS SUSTITUYENTES (INTERNAS) EN LOS SISTEMAS MIXTOS COLGANTES. Seccionemos la cadena por arriba de los apoyos de la viga o armadura, excluyamos sus partes extremas y descompongamos las fuerzas axiles de la barra seccionada en componentes verticales y horizontales (fig. 174, *a*, *b*). Consideraremos que el sistema es simétrico y, por consiguiente, los puntos de descomposición de las fuerzas se encuentran a un mismo nivel.

Planteamos la condición de equilibrio en forma de la suma de los momentos con respecto a estos dos puntos:

$$\sum M_{B'} = (V'_A + V''_A)\, l - 1\,(l - z) = 0;$$
$$\sum M_{A'} = -(V'_B + V''_B)\, l + 1\, z = 0,$$

de donde

$$V'_A + V''_A = \frac{l-z}{l}; \quad V'_B + V''_B = \frac{z}{l}. \tag{9.1}$$

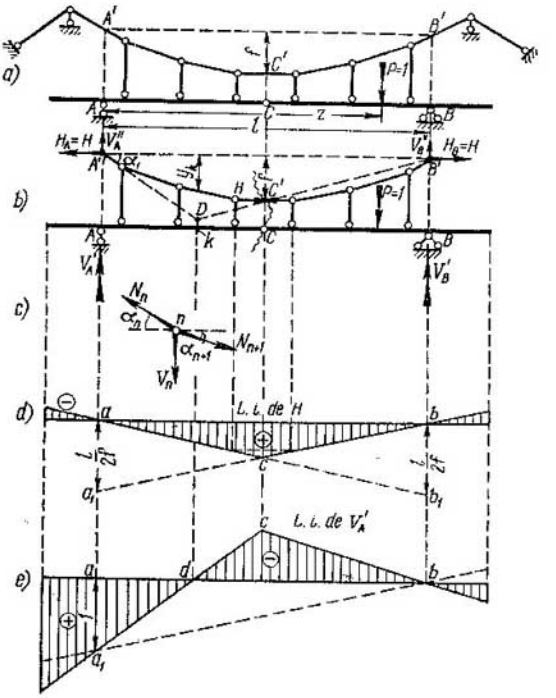


Fig. 174

Esto significa que la suma de las fuerzas V' y V'' es igual a las reacciones de apoyo de una viga simplemente apoyada, cuyas líneas de influencia son conocidas. Ahora seccionamos cualquier enésimo nudo de la cadena (fig. 174, *c*). De su equilibrio obtenemos que

$$N_n \cos \alpha_n = N_{n+1} \cos \alpha_{n+1} = H = \text{const}. \qquad (9.2)$$

De esta manera, la componente horizontal H de las fuerzas axiles en los elementos de la cadena es una magnitud constante y $H_A = H_B = H$, es el empuje horizontal de la cadena.

La fuerza axil en sus elementos es

$$N_n = \frac{H}{\cos \alpha_n}. \qquad (9.3)$$

La fuerza axil en los pendolones, de la condición de proyección de las fuerzas del nudo recortado sobre el eje vertical, es

$$V_n = H (\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n+1}). \qquad (9.4)$$

Las componentes verticales de las fuerzas axiles en los elementos extremos de la cadena son

$$V''_A = H \operatorname{tg} \alpha_1; \quad V''_B = H \operatorname{tg} \alpha_1. \tag{9.5}$$

Las reacciones de apoyo de las vigas

$$V'_A = \frac{l-z}{l} - H \operatorname{tg} \alpha_1; \qquad V'_B = \frac{z}{l} - H \operatorname{tg} \alpha_1. \tag{9.6}$$

Como se ve, con la línea de influencia del empuje horizontal H de la cadena se determinan las líneas de influencia de sus reacciones de apoyo y de sus fuerzas internas y las de los pendolones. Para su construcción, por arriba de la articulación C de la viga, seccionamos complementariamente la barra del medio de la cadena y componemos, con respecto a ella, la suma de los momentos de todas las fuerzas izquierdas

$$M_C^{izq} = M_C^{vig} - Hf = 0,$$

aquí M_C^{vig} es el momento, con respecto a C, de todas las fuerzas verticales izquierdas, igual al de la viga simplemente apoyada con respecto al mismo punto.

De donde

$$H = \frac{M_C^{vig}}{f}. \tag{9.7}$$

Esto significa que la línea de influencia del empuje horizontal H puede ser construida como si fuera la línea de influencia del momento flector M_C^{vig} en una viga simplemente apoyada, para la sección coincidente con la articulación C y sus ordenadas divididas por f (fig. 174, *d*). Esto, a su vez, significa que la línea de influencia del empuje horizontal H puede ser obtenida como la l.i. del empuje de un sistema triarticulado colgante auxiliar que pasa por la cadena y posee tres articulaciones, las A', B' y C' (fig. 174, *b*). La línea de influencia de la reacción V'_A de la viga, como esto se desprende de (9.6), está compuesta por dos: la l.i. de la reacción A de la viga simplemente apoyada y la l.i. del empuje horizontal H multiplicada por $(-\operatorname{tg} \alpha_1)$. La suma algebraica de ellas, por medio de la superposición, se expone en la fig. 174, *e*. La l.i. resultante V'_A puede ser construida con ayuda del punto cero. Ella se determina de la igualdad $A - H \operatorname{tg} \alpha_1 = 0$. Dado que en este caso $V'_A = 0$, entonces, $A = V''_A$. Por consiguiente, $\frac{V''_A}{H} = \operatorname{tg} \alpha_1$, lo cual sólo puede ser cuando el peso $P = 1$ está en la intersección de la recta $B'C'$ y la recta trazada desde el punto A' bajo el ángulo α_1, esto es, la recta que pasa por el primer eslabón de la cadena.

Ahora seccionamos la cadena por arriba del corte dado a la viga (fig. 175). Descomponemos la fuerza axil de la cadena en las componentes vertical y horizontal. El momento y la fuerza transversal

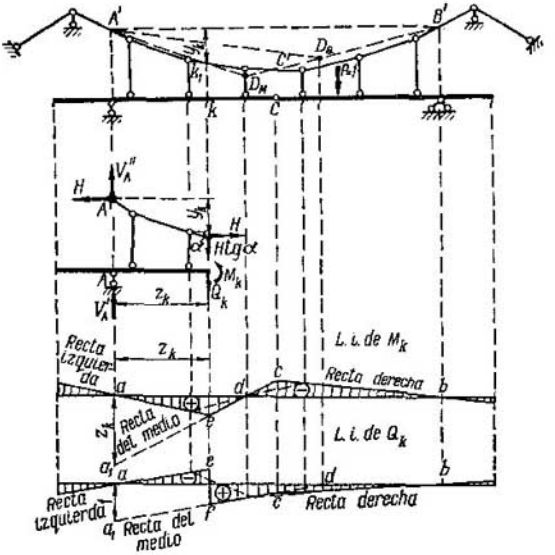


Fig. 175

en la viga son:

$$M_k = M_k^{\text{vig}} - H y_k; \tag{9.8}$$

$$Q_k = Q_k^{\text{vig}} - H \operatorname{tg} \alpha, \tag{9.9}$$

donde:

M_k^{vig} y Q_k^{vig} son el momento flector y la fuerza transversal en la viga simplemente apoyada;

y_k es la distancia vertical desde el punto de la cadena sobre la vertical de la sección hasta la línea $A'B'$.

Estas expresiones coinciden con las análogas de M_k y $\frac{Q_k}{\cos \alpha}$ en el arco triarticulado, coincidente con la cadena sin las articulaciones nodales, pero con las tres articulaciones A', B' y C', lo cual permite obtener las l.i. buscadas de M_k y Q_k en la viga, como si estas líneas fueran las del arco auxiliar. En la fig. 175 se expone la construcción de las líneas de influencia por medio de los puntos cero. El punto cero para la línea de influencia del momento flector M_k se obtiene en la intersección de las rectas $A'k_1$ y $B'C'$ y, para la línea de influencia de Q_k, en la de la recta $A'D$, paralela a la barra de la cadena por encima de la sección dada y la recta $B'C'$. Al construir la l.i. de M_k, por debajo del apoyo izquierdo se traza el segmento z_k

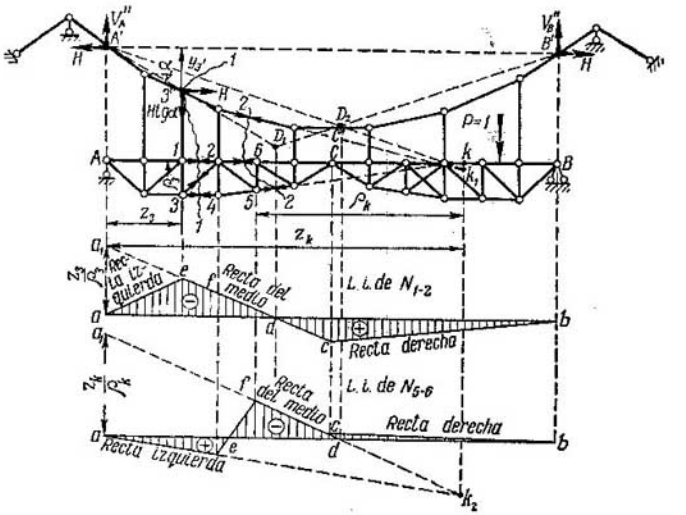


Fig. 176

y, al construir la l.i. de Q_k, el segmento igual a la unidad, dado que la l.i. de Q_k en la viga es igual a la l.i. de Q_k en el arco con las ordenadas divididas por el $\cos\alpha$.

Todo lo expuesto más arriba, para la viga, queda también en vigor para la armadura reforzada con la cadena (fig. 176). Comenzaremos la construcción de las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras de la armadura con un caso simple. Sea que se exige obtener la línea de influencia de la fuerza axil en la barra del cordón N_{1-2} de la armadura. Trazamos el corte *1-1* que secciona a la armadura y la cadena en el punto *3'*, que está por encima del *3*. El punto de momentos *3* lo elegimos de tal modo como si la cadena no existiera.

En el punto *3'* de la cadena descomponemos la fuerza axil. La condición de equilibrio será:

$$\sum M_3^{izq} = M_3^{vig} - Hy_3 + D_{1-2}\rho_3 = 0;$$

$$M_{3'} + N_{1-2}\rho_3 = 0,$$

de donde

$$N_{1-2} = -\frac{M_{3'}}{\rho_3}. \qquad (9.10)$$

Esta expresión muestra que la l.i. de N_{1-2} puede ser obtenida de la línea de influencia del momento flector en la sección *3'*, ubicada

por encima del punto de momento *3*, del mismo arco auxiliar $A'\,B'C'$ dividiéndola por ρ_3 y cambiándole el signo.

Para esto, al principio determinamos el punto cero d de la línea de influencia bajo el de intersección de las rectas $A'\,3'$ y $B'\,C'$. Por debajo del apoyo izquierdo trazamos el segmento $-\frac{z_3}{\rho_3}$ y por su extremo y el punto cero de la l.i., la recta del medio a_1d. Llevando sobre ella el punto de momento *3* y uniéndolo con el de la base por debajo del apoyo izquierdo obtenemos la recta izquierda *ae*. Sobre esta misma recta bajamos la articulación C' y, uniéndola con el punto de la base por debajo del apoyo derecho obtenemos la recta derecha *cb*. Sobre la recta izquierda bajamos el nudo izquierdo *1*, respecto al corte, situado en el cordón de carga (punto *e*) y, sobre la recta del medio, el nudo derecho *2* (punto *f*). Entre ellos se sitúa la recta de unión que, en este caso, coincide con la del medio. El orden examinado de construcción de la línea de influencia seguirá siendo correcto también en aquel caso, cuando el punto de momentos no está bajo el elemento seccionado de la cadena como, por ejemplo, al construir la l.i. de la fuerza axil en la barra *5-6*. Sólo que, en este caso, deberemos presentar al arco auxiliar atravesando sucesivamente los puntos A', k_1, C' y B'. En el caso dado, el punto k_1, *obligatoriamente*, estará sobre la recta de la barra seccionada de la cadena, bajo el punto de momento k.

La construcción de la l.i. de N_{5-6} puede ser efectuada por medio del arco auxiliar y del punto cero en el mismo orden que se expuso más arriba. El punto cero d se halla por debajo del punto de intersección de las rectas $A'k_1$ y $B'C'$. De igual manera que antes, se traza por debajo del apoyo izquierdo, hacia arriba, el segmento $-\frac{z_k}{\rho_k}$ (dado que el momento con respecto al punto de momentos k, debido a la fuerza positiva N_{5-6} y situado a la izquierda de la sección, está dirigido en sentido de las agujas del reloj). En adelante, la construcción es la usual. Sobre la recta del medio a_1d, trazada por el segmento colocado bajo el apoyo izquierdo y el punto cero de la línea de influencia, se baja el punto de momentos k y se une con el de la base por debajo del apoyo izquierdo. Así se obtiene la recta izquierda ak_2. Sobre esta misma recta se baja la articulación C y se une con el punto de la base por debajo del apoyo derecho. Así se obtiene la recta derecha *cb*. Sobre la recta izquierda se baja el nudo *2*, situado a la izquierda de la sección y, sobre la recta del medio, el nudo *6* situado a la derecha. Entre ellos estará la recta de unión *ef*.

Esta misma regla, también se puede utilizar para el caso, cuando el punto de momentos se aleja al infinito, como por ejemplo, al construir la línea de influencia de N_{1-3} (fig. 177). En este caso, el punto k_1 del arco auxiliar que está sobre la barra seccionada de la cadena, también se encuentra en el infinito. Esto significa que el punto cero de la línea de influencia se encontrará por debajo de la intersección de la recta $B'C'$ y de $A'k_1$ trazada desde el punto A',

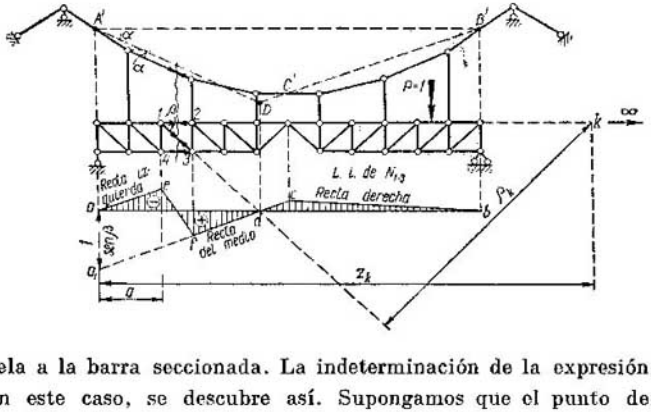


Fig. 177

paralela a la barra seccionada. La indeterminación de la expresión $\frac{z_k}{\rho_k}$, en este caso, se descubre así. Supongamos que el punto de momentos se encuentra sobre el cordón donde está situado el nudo izquierdo con la fuerza N_{1-3} y que ella, por ahora, no se alejó al infinito. Entonces, de simples consideraciones geométricas tendremos que

$$\rho k = (z_k - a)\,\text{sen}\beta,$$

de donde

$$\frac{z_k}{\rho_k} = \frac{1}{\text{sen}\,\beta} + \frac{a}{\rho_k}.$$

Ahora comenzaremos a alejar el punto de momentos hacia el infinito, entonces

$$\frac{z_k}{\rho_k} = \frac{1}{\text{sen}\,\beta}.$$

Esta expresión se toma con el signo más cuando el momento de la fuerza positiva N_{1-3}, aplicada a la parte izquierda con respecto al punto de momentos k situado en el infinito a la derecha, está dirigido en sentido contrario a las agujas del reloj. Señalemos que, como esto fue indicado para las armaduras en arco, la l.i. de N_{1-3} podría ser construida por medio de la l.i. de la fuerza axil Q de la barra seccionada de la cadena en el arco imaginario $A'\,B'\,C'$.

§ 84. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO Y DE LAS FUERZAS SUSTITUYENTES (INTERNAS) EN LOS SISTEMAS MIXTOS EN ARCO. Si nosotros, en los puntos de por debajo de los apoyos de la viga o armadura, seccionamos las barras extremas de la cadena (fig. 178), descomponemos la fuerza axil en estas últimas en las componentes vertical y horizontal y les fijamos la dirección indicada en la figura, entonces notamos

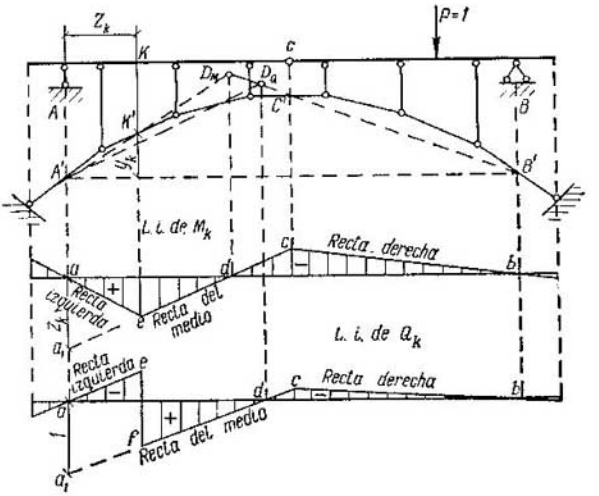


Fig. 178

que todas las expresiones (9.1)—(9.9) del § 83 se repiten también aquí. Esto significa, que todos los procedimientos expuestos allí, de construcción de líneas de influencia, son lícitos también para las vigas y armaduras reforzadas con un arco articulado. En este caso, las barras del arco y los montantes están comprimidos.

Como ejemplo, construimos en una sección de la viga las líneas de influencia de M_k y Q_k (fig. 178). El punto cero de la línea de influencia del momento flector M_k lo hallaremos por debajo de la intersección de la recta $B'\,C'$ y de la recta $A'\,k$, trazada desde el punto A' a través del punto k_1 sobre la barra del arco articulado bajo la sección y el punto cero de la línea de influencia de la fuerza transversal Q_k, se halla por debajo de la intersección de la recta $B'\,C'$ y de la recta trazada desde el punto A' paralela al elemento seccionado del arco articulado. Al construir la línea de influencia del momento flector M_k, en la sección de la viga, bajo del apoyo izquierdo, se traza el segmento z_k y, por su extremo y el punto cero, la recta del medio. Sobre ella se baja la sección y se une con el punto de la base por debajo del apoyo izquierdo, obteniéndose la recta izquierda. Sobre la misma recta del medio se baja la articulación C' y el punto c se une con el de la base por debajo del apoyo derecho, obteniéndose la recta derecha. Al construir la línea de influencia de Q_k, por debajo del apoyo izquierdo se traza un segmento igual a la unidad. A través de él se traza la recta del medio. Su parte útil se sitúa a la derecha de la sección hasta el punto c bajo la articulación C'. La recta izquierda se traza por el punto de la base por deba-

jo del apoyo izquierdo, paralela a la recta del medio. Su parte útil se sitúa a la izquierda de la sección. Sobre la recta del medio se baja la articulación C' y el punto c se une con el punto de la base por debajo del apoyo derecho.

CAPITULO X * CARGAS LIMITES DE LOS SISTEMAS ISOSTATICOS PLANOS

§ 85. FUERZAS INTERNAS LIMITES EN LA SECCION DE LA BARRA. Se llama estado límite o extremo de la sección de una barra a aquel, en el cual un aumento cualquiera de las fuerzas internas es físicamente imposible o está limitado por las suposiciones aceptadas. En este último caso, el estado límite de la sección no sólo depende de las propiedades físicas del material, sino también, del punto de vista adoptado en cada caso concreto sobre el propio estado límite.

Las investigaciones teóricas del estado límite de la sección se basan en los diagramas de deformación de los materiales para un estado de tensión uniaxial, los cuales se sustituyen por diagramas simplificados que reflejan a los reales sólo con aproximación (en lo fundamental). Sus formas aproximadas se dan, para los materiales frágiles, en la fig. 179, *a*, *b* y, para los plásticos, en la fig. 179, *c*, *d*. Las fórmulas de las fuerzas internas límites en la sección también dependen de la forma del diagrama de deformación simplificado adoptado. Aquí nos limitaremos a examinar solamente los diagramas de deformación más simples: de la lineal (fig. 179, *a*) y de la plástica ideal (fig. 174, *c*). El método de investigación adoptado, en este caso, puede ser empleado también al examinar diagramas más complicados.

El diagrama de deformación lineal puede servir para muchos materiales frágiles sólo como una *primera* aproximación *burda*, no obstante, con medios simples permite determinar el estado límite de la sección.

El diagrama plástico ideal no toma en cuenta el endurecimiento del material. Lo cual, sin embargo, como muestran las investigaciones, si el material posee una gran zona de fluencia, no lleva a grandes errores, dado que en tales materiales el endurecimiento comienza cuando la resistencia de la sección desaparece casi completamente. Los ensayos efectuados mostraron que, para las construcciones metálicas cuyo material posee una gran zona de fluencia, las cargas de rotura son cercanas a las teóricas determinadas en base a tal diagrama.

Durante el cálculo por el método de tensiones admisibles, se acepta corrientemente, que el estado límite de la sección comienza cuando la tensión reducida determinada por la hipótesis de solidez adoptada, es igual al límite de resistencia para el material frágil y al límite de fluencia para el plástico.

La rotura de una barra en la sección dada, elaborada con un material capaz de deformarse linealmente hasta la rotura, puede iniciarse en un punto en el que la tensión reducida alcanza el límite de resistencia. Corrientemente, después de esto, si el estado de tensión no es uniforme, la rotura se extiende rápidamente por toda la sección.

Al alcanzar la tensión reducida, el límite de fluencia *sólo* en un punto de la sección de una barra de material plástico, aún no produce ni fractura ni tensiones remanentes. Pero un subsiguiente aumento

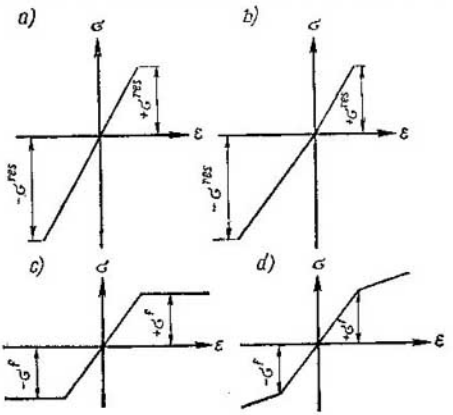


Fig. 179

de las fuerzas internas, sí origina deformaciones y tensiones remanentes. Por el método de las tensiones admisibles, el estado límite de la sección de una barra de material plástico coincide con su rotura, sólo cuando las tensiones reducidas alcanzan el límite de fluencia simultáneamente en toda la sección, como, por ejemplo, en el caso de fracción y compresión de una barra recta.

Al realizar el cálculo por el método de cargas de rotura, como estado límite de la sección se emplea el estado para el cual todo aumento de las fuerzas internas en ella es físicamente imposible, en otras palabras, en la sección, el material no lo puede resistir. Para los materiales capaces de deformarse linealmente hasta la rotura, ésta comienza casi «de golpe» por toda la sección, en cuanto la tensión reducida alcanza en un punto el límite de resistencia. Por eso, para tales materiales, los estados límites de la sección por los métodos de tensiones admisibles y cargas de rotura son iguales.

En los materiales plásticos el estado límite de la sección comienza al desarrollarse completamente las deformaciones plásticas (fluidez) por toda la sección o, como se dice, cuando en la sección se origina una «articulación plástica». En la articulación plástica, las fuerzas internas ya no pueden aumentar, la sección no ejerce resistencia a la deformación plástica y la articulación plástica puede «abrir-

se» en la dirección en que aumenta la deformación. Las fuerzas internas que actúan en la «articulación plástica», pueden subsistir gracias a la plasticidad del material hasta que la barra quede dividida, por toda la sección, en dos partes. De todo lo dicho se desprende la diferencia de principio entre los estados límites de la sección en las barras de materiales frágiles y en las de materiales plásticos.

§ 86. ECUACIONES PARA LAS FUERZAS SUSTITUYENTES LIMITES (INTERNAS) EN LA SECCION

1. ESTADO LIMITE DE LA SECCION A LA TRACCION O COMPRESION

Para los materiales frágiles, independientemente de la forma del diagrama de deformación:

$$\left.\begin{aligned} N_{\text{lím}} &= \sigma_{\text{tr}}^{\text{res}} F \text{ a la tracción;} \\ N_{\text{lím}} &= \sigma_{\text{comp}}^{\text{res}} F \text{ a la compresión;} \\ N_{\text{lím}} &= \sigma_{\text{cr}} F \text{ a la flexión axil.} \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

Para los materiales plásticos (articulación plástica):

$$\left.\begin{aligned} N_{\text{lím}} &= \sigma^{\text{f}} F \text{ a la tracción y compresión;} \\ N_{\text{lím}} &= \sigma_{\text{cr}} F \text{ a la flexión axil.} \end{aligned}\right\} \qquad (10.2)$$

2. ESTADO LIMITE DE LA SECCION A LA FLEXION SIMPLE

Consideraremos que la sección, con respecto al eje vertical, es simétrica y que la carga actúa sobre el plano vertical que pasa por el eje de la barra (fig. 180).

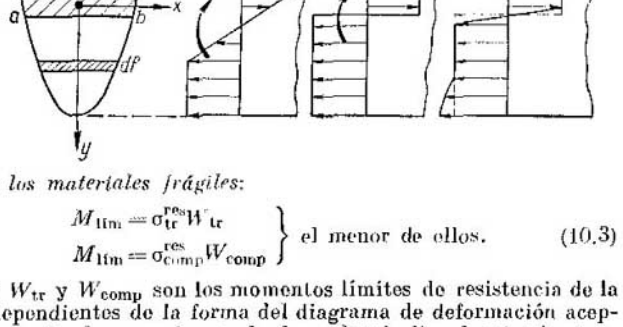


Fig. 180

Para los materiales frágiles:

$$\left.\begin{aligned} M_{\text{lím}} &= \sigma_{\text{tr}}^{\text{res}} W_{\text{tr}} \\ M_{\text{lím}} &= \sigma_{\text{comp}}^{\text{res}} W_{\text{comp}} \end{aligned}\right\} \text{ el menor de ellos.} \qquad (10.3)$$

Aquí W_{tr} y W_{comp} son los momentos límites de resistencia de la sección dependientes de la forma del diagrama de deformación aceptado. En particular, en el caso de dependencia lineal entre las tensiones y las deformaciones hasta el instante en que surge la rotura,

ellos son iguales a los momentos de resistencia corrientes W empleados en el cálculo elástico.

Para los materiales plásticos («articulación plástica»), siendo iguales los límites de fluidez a la tracción y a la compresión, las expresiones de las fuerzas sustituyentes (internas) tienen la forma:

$$N_{\lim} = \int_{F_{tr}} \sigma^t \, dF - \int_{F_{comp}} \sigma^t \, dF = 0; \quad M_{\lim} = \int_{F_{tr}} \sigma^t \, dFy + \int_{F_{comp}} \sigma^t \, dFy.$$

De la primera igualdad obtenemos que

$$F_{tr} = F_{comp}. \tag{10.4}$$

Esto significa que *la línea cero o neutra en la articulación plástica, en el caso de flexión simple, divide a la sección en dos partes de iguales dimensiones.*

La segunda igualdad determina que

$$M_{\lim} = \sigma_t W_{pl}, \tag{10.5}$$

donde W_{pl} es el momento de resistencia plástico,

$$W_{pl} = |S_{tr}| + |S_{comp}| = 2|S_{tr}| = 2|S_{comp}|;$$

S son los momentos estáticos, con respecto al eje central perpendicular al plano de flexión, de las partes comprimidas o traccionadas de la sección: para el rectángulo $W_{pl} = \frac{bh^2}{4} = 1{,}5\ W$; para el doble T $W_{pl} \approx (1{,}15-1{,}17)\ W$; para el círculo $W_{pl} \approx 1{,}7\ W$.

Señalemos que, en la «articulación plástica», la distribución teórica de las tensiones normales por la sección en forma de dos rectángulos es prácticamente imposible. Siempre, en caso de flexión, cerca de la línea neutra habrá un núcleo elástico que en los cálculos se desprecia, puesto que su influencia es de poca importancia y que al tenerlo en cuenta complicaría los cálculos. Corrientemente, la consolidación del material tampoco se toma en consideración.

Las tensiones normales en las secciones de las barras rectas, si tomamos en cuenta el diagrama de deformación real, se distribuían por una curva que representa a este diagrama, sólo que en distinta escala y dado vuelta (fig. 180, *d*). Esto se desprende de la hipótesis de las secciones planas, por la cual, los alargamientos son proporcionales a las distancias desde la línea neutra. Los errores debidos a que se desprecia la consolidación y el núcleo elástico, son cualitativamente contrarios y, por eso, en parte se compensan mutuamente.

3. ESTADO LIMITE DE LA SECCION EN EL CASO DE FLEXION CON FUERZA TRANSVERSAL

Para los materiales frágiles capaces de deformarse linealmente hasta la rotura, el estado límite se determina por cualquiera de las hipótesis de solidez, por la tensión reducida, que deberá ser igual

al límite de resistencia del material. La tensión reducida se expresa por medio de las tensiones normales y tangenciales

$$\sigma = \frac{M}{J} y, \quad \tau = \frac{QS^{sec}}{Jb}. \tag{10.6}$$

En el caso de flexión los puntos peligrosos serán frecuentemente los del borde, en los que las tensiones tangenciales son nulas y las reducidas son iguales a las normales. En tales casos, (10.3) serán las condiciones de estado límite.

Para los materiales plásticos («articulación plástica»), el valor del momento límite, a la flexión simple, será un poco disminuido

Fig. 181

por las tensiones tangenciales. Basándonos en que éstas son recibidas *sólo* por el núcleo elástico de la sección, exponemos una resolución aproximada. El diagrama de las tensiones normales en los bordes de la sección, fuera del núcleo elástico (fig. 181), será rectangular y, en la parte elástica de la sección, triangular. Las tensiones tangenciales, dentro de los límites de la zona elástica, varían por la ley parabólica si allí la sección es rectangular. La resistencia de la sección se agota cuando $\tau_{máx}$, sobre la línea cero, alcanza el valor límite τ^t, establecido en base a la hipótesis de solidez aceptada. Con tales premisas, la sección no se halla aún en completo estado plástico [15], lo cual se toma como margen de seguridad. Cuanto menor sea el núcleo elástico, tanto más exacto será el resultado del cálculo.

Mostremos el empleo de este procedimiento en una sección doble T (fig. 181). Sea $2y_t$ la altura del núcleo elástico. Entonces,

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{\delta 2 y_t} = \tau^t,$$

de donde

$$y_t = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{\delta \tau^t}. \tag{10.7}$$

El momento límite en la sección es igual a:

$$M_{lim} = \sigma^t W_{pl} - \left(\frac{\sigma^t \delta y_t}{2} \cdot \frac{1}{3} y_t\right) 2.$$

Colocando aquí y_t obtenemos definitivamente que

$$M_{lim} = \sigma^t W_{pl} - \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^2 \sigma^t}{\delta (\tau^t)^2}, \tag{10.8}$$

donde $\sigma^t W_{pl}$ es el momento límite a la flexión simple.

Las condiciones del estado límite se pueden expresar así:

$$\frac{M_{\text{lím}}}{\sigma^t} + \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^2_{\text{lím}}}{\delta\,(\tau^t)^2} = W_{\text{pl}}. \tag{10.9}$$

Las expresiones obtenidas son correctas mientras sea $2y_t \leqslant h_1$. Para la sección rectangular, éstas son válidas siendo $2y_t \leqslant h$ y $\delta = b$, esto es, siendo $\frac{M}{W} > \sigma^t$. En los casos en que $\frac{M}{W} < \sigma^t$, los límites de la magnitud $Q_{\text{lím}}$ son aproximadamente iguales a los valores siguientes:

$$\left.\begin{aligned} &\text{para } \frac{M}{W} = \sigma^t \qquad Q_{\text{lím}} = \frac{2}{3}\,\tau^t\,\delta h, \\ &\text{para } \frac{M}{W} = 0 \qquad Q_{\text{lím}} = \tau^t\,\delta h. \end{aligned}\right\} \tag{10.9'}$$

4. ESTADO LIMITE DE LA SECCION EN EL CASO DE FLEXION SIMPLE CON FUERZA AXIL

Para los materiales frágiles capaces de deformarse linealmente hasta la rotura, la tensión reducida de borde es igual a la normal:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W}. \tag{10.10}$$

Las condiciones límites para un diagrama heterovalente serán:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma^{\text{res}}_{\text{tr}}, \quad \sigma_{\text{mín}} = -\sigma^{\text{res}}_{\text{comp}}. \tag{10.11}$$

Para los materiales plásticos («articulación plástica»), al deducir las fórmulas del estado límite, es conveniente considerar a la fuerza axil comprimente positiva. El diagrama de las tensiones normales en la «articulación plástica», en el caso de flexocompresión, se muestra en la fig. 182, donde *ab* es la línea neutra en el caso de flexión, *cd*, la línea neutra para la flexión con fuerza axil y ΔF, la superficie complementaria de la parte comprimida de la sección por la acción de la fuerza axil. En el caso de flexotracción, el diagrama será análogo, sólo que la línea neutra *cd* y la superficie ΔF se hallan al otro lado de la recta *ab*.

Designemos, como anteriormente, por F_{tr} y F_{comp} a las superficies de las partes traccionada y comprimida de la sección en el caso en que sobre la sección examinada actúa solamente el momento flector. Recordamos que $F_{\text{tr}} = F_{\text{comp}} = 1/2\ F$ y

$$\left|S_{\text{tr}}\right| = \left|R_{\text{comp}}\right| = \frac{W_{\text{pl}}}{2}.$$

Las expresiones de las fuerzas internas en función de las tensiones son:

$$N_{\text{lím}} = \sigma^t F - 2\sigma^t\,(F_{\text{tr}} - \Delta F) = 2\sigma^t\,\Delta F; \tag{10.12}$$

$$M_{\text{lím}} = \int_{F_{\text{tr}} - \Delta F} 2\sigma^t\,dF y = 2\sigma^t\,(S_{\text{tr}} - \Delta F y_0), \tag{10.13}$$

donde ΔF es el incremento de la superficie de la parte comprimida de la sección, debido a la acción de la fuerza axil N e y_0, la distancia

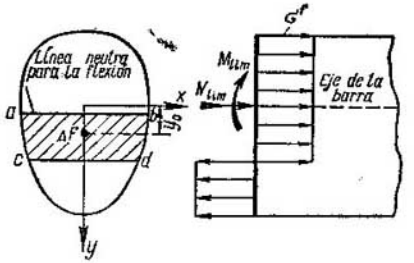


Fig. 182

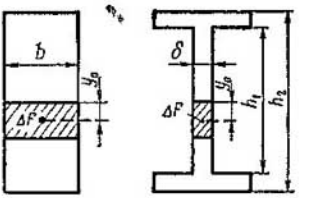


Fig. 183

hasta su centro de gravedad desde el eje *central* de toda la sección.

Obtenemos la condición general del estado límite de la sección, excluyendo ΔF de (10.12) y (10.13),

$$\frac{M_{lím}}{\sigma^f} + \frac{N_{lím}}{\sigma^f} y_0 = 2S_{tr} = W_{pl}. \qquad (10.14)$$

Ella no depende del signo de la fuerza axil. En esta expresión, la magnitud y_0 está subordinada a la forma de la sección y al valor ΔF igual a $\frac{N_{lím}}{2\sigma^f}$. Para las secciones doble T y rectangular (fig. 183)

$$\Delta F = \delta 2y_0; \quad y_0 = \frac{N_{lím}}{4\sigma^f \delta}.$$

Colocando el valor de y_0 en (10.14), obtenemos

$$\frac{M_{lím}}{\sigma^f} + \frac{N^2_{lím}}{4(\sigma^f)^2 \delta} = W_{pl}. \qquad (10.15)$$

Para la doble T deberá ser cumplida la condición

$$2y_0 = \frac{N_{lím}}{2\sigma^f \delta} \leqslant \frac{h_1}{2}.$$

La fórmula (10.15), por cuanto contiene el valor $N_{lím}$ al cuadrado, es correcta también para la flexotracción.

5. ESTADO LIMITE DE LA SECCION EN EL CASO DE FLEXION CON FUERZAS TRANSVERSAL Y AXIL

Para los materiales frágiles capaces de deformarse linealmente hasta la rotura, las tensiones en la sección son

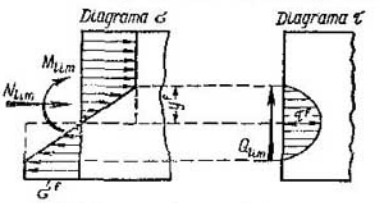
$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{J} y; \quad t = \frac{QS}{Jb}. \qquad (10.16)$$

Hablando en general, desconocemos el punto de la sección transversal con la mayor tensión reducida.

En muchos casos, ésta estará sobre el borde de la sección y, entonces, las condiciones del estado límite (10.11) se conservan.

Para los materiales plásticos («articulación plástica»), las fuerzas internas en la «articulación plástica» se representan en la fig. 184.

Fig. 184



La presencia de la fuerza transversal Q_{lim} en la sección, como se ve, no modifica los valores de la fuerza axil N_{lim}, pero disminuye el momento M_{lim} en la magnitud $\Delta M = \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^2_{lim} \sigma^f}{\delta (\tau^f)^2}$. Sustituyendo en (10.15) M_{lim} por su valor aumentado en ΔM, obtenemos la condición del estado límite de la sección en la forma siguiente:

$$\frac{M_{lim}}{\sigma^f} + \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^2_{lim}}{\delta (\tau^f)^2} + \frac{N^2_{lim}}{4\delta (\sigma^f)^2} = W_{pl}. \qquad (10.17)$$

Todos los casos examinados anteriormente son casos particulares de esta expresión general.

Ejemplo 14. Determinar la fuerza axil límite en la sección 10×20 cm de una barra rectangular, si el momento límite es $M_{lim} = 19\,200$ kgm y $\sigma^f = 2000$ kgf/cm². Por la fórmula (10.15):

$$\frac{19\,200 \cdot 10^2}{2\,000} + \frac{N^2_{lim}}{4 \cdot 2\,000^2 \cdot 10} = 10 \cdot 20^2 : 4 = 1\,000 \text{ cm}^3,$$ de donde $N_{lim} = 80\,000$ kg.

Ejemplo 15. Determinar la fuerza transversal límite para los mismos datos, adoptando $\tau^f = (2\,000 : \sqrt{3})$ kgf/cm². Por la fórmula (10.9):

$$\frac{19\,200 \cdot 10^2}{2\,000} + \frac{3Q^2_{lim}}{16 \cdot 10\,(2\,000 : \sqrt{3})^2} = 10 \cdot 20^2 : 4 =$$

$$= 1\,000 \text{ cm}^3, \text{ de donde } Q_{lim} \approx 53\,300 \text{ kg}.$$

§ 87. ESTADOS LIMITES DE LOS SISTEMAS POR LA CAPACIDAD PORTANTE. Se llama estado límite de un sistema aquel en el cual el sistema pierde su capacidad de resistir las acciones externas o queda inútil para un siguiente servicio.

Recordamos (véase el § 2) que durante el cálculo se diferencian tres tipos de estados límites de cálculo: el primero, con relación a la resistencia mecánica, estabilidad y fatiga del material, el segundo, a la rigidez y el tercero a la formación de fisuras.

El cálculo por el primer tipo de estado límite respecto a la resistencia mecánica y a la estabilidad, se efectúa bajo la carga *teórica* igual a la de servicio o *normativa*, multiplicada por *el coeficiente de sobrecarga n* (margen de seguridad por la carga) mayor que la uni-

dad. El cálculo a la fatiga por el primer estado límite y a la rigidez por el segundo, se efectúa bajo la carga de servicio.

En calidad de característica de resistencia mecánica del material se adopta *la resistencia de cálculo o teórica R*, igual a la *normativa* o de servicio R^N (límite de fluidez, de resistencia mecánica y de fatiga), multiplicada por *el coeficiente de homogeneidad k* (margen de seguridad por el material) menor que la unidad. La particularidad del trabajo del sistema se toma en cuenta con *el coeficiente de condiciones de trabajo m*, el cual puede ser mayor o menor que la unidad.

Corresponde al cálculo «elástico» el de estructuras, cuyo material es capaz de conservar la dependencia lineal entre las tensiones y deformaciones hasta la misma rotura. Si en él hemos de despreciar, como anteriormente lo hicimos, la variación de las dimensiones de la estructura debida a la deformación bajo la carga de cálculo, lo cual hablando en general, es menos exacto que para la normativa, entonces, con frecuencia es aplicable el principio de independencia de acción de las fuerzas.

El cálculo de estructuras de materiales plásticos, en las que existen deformaciones plásticas, corresponde al cálculo «plástico» en el que el principio de independencia de acción de las fuerzas se aplica raramente y aun con restricciones complementarias.

El estado límite del sistema, respecto a la capacidad portante, es aquel en el cual el sistema se hace, como dijéramos, *variante*, bajo una carga que provoca la fluencia o la rotura del material. En este caso, en secciones aisladas, surgen estados límites, esto es, en los materiales frágiles aparecen y se desarrollan fisuras y, en los plásticos, «articulaciones plásticas». La fisura elimina en la sección de uno a tres vínculos y «la articulación plástica» sólo uno, por cuanto no impide el subsiguiente desarrollo de la deformación del elemento infinitesimal de la barra en este sitio, en la dirección que corresponde a la apertura de la «articulación plástica». En otras palabras, la articulación plástica permite un desplazamiento del sistema en aquella dirección en que tuvo lugar su formación. No obstante, dicha articulación dificulta el desarrollo de cualesquiera deformaciones durante las cuales se descarga el material, que se encuentra en estado plástico, puesto que en este caso el material se comporta como elástico. De tal manera, la «articulación plástica» es *unilateral*, que se abre en una sola dirección completamente determinada, lo que la diferencia de la articulación común. Además, en muchos casos, el momento flector en ella no es igual a cero, sino al momento límite posible para la combinación dada de fuerzas internas en la sección.

Con el surgimiento de la «articulación plástica» en el sistema, las fuerzas internas en la sección no desaparecen, pero al aparecer las fisuras, pueden extinguirse o variar su forma considerablemente o a veces permanecer invariables (compresión). La desaparición o variación de las fuerzas internas, al aparecer las fisuras en un material frágil, puede suceder rápidamente, lo que está ligado con el

efecto *dinámico* de su variación y puede reflejarse en la resistencia de la parte restante del sistema.

La carga que corresponde a tal estado límite del sistema se denomina carga límite o *de rotura*.

El sistema isostático pasa al estado límite al aparecer una sola fisura por toda la sección o una «articulación plástica».

§ 88. CARGAS LIMITES PARA LAS VIGAS. El estado límite de las vigas isostáticas comienza al aparecer una fisura por toda la sección o una «articulación plástica». La rotura ocurre bajo las fuerzas internas límites $M_{\text{lím}}$ y $Q_{\text{lím}}$ en la sección.

Si el material de la viga es frágil, entonces excluyendo del examen los casos particulares cuando la tensión reducida límite tiene lugar dentro de la sección, examinemos sólo aquellos casos, cuando dicha

Fig. 185

Fig. 186

tensión sea igual a la tensión de borde y, por consiguiente, no dependa de las tensiones tangenciales. La condición del estado límite de una viga (véase 10.3), se determina por el menor de los dos valores:

$$\left.\begin{aligned} M_{\text{lím}} &= \sigma_{\text{tr}}^{\text{res}} W_{\text{tr}}; \\ M_{\text{lím}} &= \sigma_{\text{comp}}^{\text{res}} W_{\text{comp}}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.18)$$

donde $\sigma_{\text{tr}}^{\text{res}}$ y $\sigma_{\text{comp}}^{\text{res}}$ son los límites de resistencia a la tracción y compresión y W_{tr} y W_{comp}, los momentos límites de resistencia de la sección para sus partes comprimida y traccionada.

Estos últimos dependen del diagrama de deformación del material. Cuando el diagrama es lineal, éstos son iguales a los momentos resistentes corrientes.

El parámetro general de la carga límite dada se determina por el mayor momento flector, expresado en la forma general en función de este parámetro buscado e igualado a $M_{\text{lím}}$, expresado a través de σ^{res}. Para una carga fija, la posición de la sección y el valor del momento mayor, debido a la carga del tipo dado, se determinan por el diagrama de momentos (figs. 185 y 186). Para una carga rodante, son incógnitas no sólo el valor de $M_{\text{lím}}$, sino también, la posición de la sección correspondiente al mayor momento flector. Por cuanto la expresión (10.18), con respecto a $M_{\text{lím}}$, es lineal, entonces, si aún es válido el principio de independencia de acción de las fuerzas en el estado límite, el sitio y la magnitud del momento flector mayor pueden ser hallados, con los procedimientos expuestos

anteriormente, por el estado no deformado de la viga. En particular pueden ser empleadas las líneas de influencia de los momentos flectores para ciertas secciones, por las cuales se establece la posición teórica de la carga y se efectúa el cálculo de los valores teóricos. De ellos, para confrontarlos por la fórmula (10.18), se elige el numéricamente mayor.

Si el material de la viga es plástico, entonces, la condición del estado límite de las vigas, por (10.9), tiene el aspecto:

$$M_{\text{lim}} + \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^2_{\text{lim}} \sigma^t}{\delta (\tau^t)^2} = \sigma^t W_{\text{pl}}. \qquad (10.19)$$

Suponiendo a $\tau^t = \xi \sigma^t$, donde $\xi < 1$, y depende de la hipótesis de resistencia adoptada, la expresión (10,19) puede ser presentada así

$$\frac{M_{\text{lim}}}{W_{\text{pl}}} \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^2_{\text{lim}} W_{\text{pl}}}{\xi^2 M^2_{\text{lim}} \sigma}} \right] = \sigma^t. \qquad (10.20)$$

El parámetro general de la carga se determina por el mayor valor de las magnitudes contenidas en los primeros miembros de las fórmulas (10.19) y (10.20). Para una carga fija, si en el estado límite es admisible la determinación de las fuerzas internas por el esquema de la viga no deformada, este problema puede ser resuelto o por medio de la construcción del diagrama de los valores contenidos en los primeros miembros de las fórmulas o por la vía de calcular a elección sus ordenadas elegidas para aquellas secciones en las cuales se esperan los mayores valores de estas magnitudes.

En el caso de carga rodante, la cuestión se hace más complicada. Por cuanto los valores contenidos en los primeros miembros de las expresiones (10.19) y (10.20) no son funciones lineales de las fuerzas internas M y Q, entonces, incluso si consideramos que en el estado límite el principio de independencia de acción de las fuerzas es aplicable para el cálculo de M y Q, ya no lo será para el cálculo de los primeros miembros de las expresiones (10.19) y (10.20). Por eso, construir las l.i. de las expresiones de estos miembros ya no es posible. Si para M y Q es válido el principio de independencia de acción de las fuerzas en el estado límite, entonces, se podrán emplear, sin restricciones, las líneas de influencia para M y Q, sólo para aquellos casos raros, cuando para ellos es idéntica la posición teórica de la carga rodante. Por cuanto, comúnmente, la influencia de la fuerza transversal no es grande, entonces, su valor *aproximado* puede ser tomado por la posición teórica de la carga rodante, determinada por la línea de influencia del momento M. El resultado de tal cálculo, si se desea, puede ser precisado con sucesivas aproximaciones. Para esto es indispensable colocar en (10.19), en lugar de uno de los factores Q^2_{lim}, el valor de la fuerza transversal Q^* debida a la carga, establecida por la línea de influencia del momento M en la posición de cálculo y obtener una nueva expresión en la forma siguiente:

$$M_{\text{lim}} + \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^* Q_{\text{lim}} \sigma^t}{\delta (\tau^t)^2} \quad \sigma^t W_{\text{pl}}. \qquad (10.21)$$

A continuación, por cuanto el primer miembro de (10.21) depende linealmente de M y Q, se puede construir su línea de influencia y por esta última hallar la segunda posición de la carga rodante y para ésta determinar el valor máximo del primer miembro. La l.i. del primer miembro de (10.20), designada en adelante por l.i. C, estará compuesta por las l.i. de M y Q multiplicadas por los coeficientes de la expresión (10.21), esto es,

$$\text{l.i. de } C = \text{l.i. de } M + \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^* \sigma^f}{\delta (\tau^f)^2} (\text{l.i. de } Q). \qquad (10.22)$$

Si el valor de la fuerza transversal Q^{**} en la segunda posición teórica de la carga se diferencia considerablemente del de Q^* en la primera, entonces, se puede hacer la siguiente aproximación, tomando para (10.22) en lugar de Q^* el nuevo valor Q^{**}.

En casos aislados, por su pequeñez, es posible despreciar a la fuerza transversal en (10.19). La inexactitud relativa obtenida en este caso es aproximadamente igual a:

$$A = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{Q^2_{\text{lím}} W_{\text{pl}}}{\xi^2 M^3_{\text{lím}} \delta}} \right). \qquad (10.23)$$

La resolución de las ecuaciones (10.19) y (10.20), al determinar la carga límite (de rotura), es conveniente efectuarla por medio de aproximaciones sucesivas, suponiendo en primera aproximación que $Q = 0$.

Sustituyendo en las expresiones (10.18) — (10.20) a $M_{\text{lím}}$ y $Q_{\text{lím}}$ respectivamente, por el momento flector M y la fuerza transversal Q, debidos a la carga teórica, y a σ^f, σ^{res} y τ^f por las resistencias teóricas R multiplicadas por el coeficiente de condiciones de trabajo m, obtenemos las fórmulas para el cálculo por el primer estado límite teórico:

$$M \leqslant mR_{\text{tr}} W_{\text{tr}}, \; M \leqslant mR_{\text{comp}} W_{\text{comp}}; \qquad (10.18')$$

$$M + \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^2 mR}{\delta (mR_\tau)^2} \leqslant mRW_{\text{pl}}; \qquad (10.19')$$

$$\frac{M}{W_{\text{pl}}} \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^2 W_{\text{pl}}}{\xi^2 M^2 \delta}} \right] \leqslant mR. \qquad (10.20')$$

Todo lo dicho referente a los primeros miembros de (10.18) — (10.20) es correcto también para las fórmulas (10.18') y (10.20').

Ejemplo 16. Determinar la fuerza límite P para una viga (fig. 187), siendo $l = 8$ m, $q = 200$ kgf/m, $\sigma^f = 2\,000$ kgf/cm^2.

$$\tau^f = \frac{\sigma^f}{\sqrt{3}}, \quad \text{esto es} \quad \frac{\tau^f}{\sigma^f} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

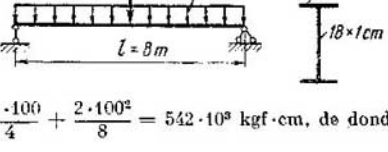
El momento de resistencia límite $W_{\text{pl}} = (10 \cdot 9{,}5 + 9 \cdot 4{,}5) \cdot 2 = 271$ cm^3. Determinamos la fuerza límite P por la expresión (10.19), despreciando al principio la fuerza transversal $\frac{P \cdot 800}{4} + \frac{2 \cdot 800^2}{9} = 2\,000 \cdot 271 = 542 \cdot 10^3$ kgf·cm, de donde $P = 1\,910$ kgf.

Para la fuerza hallada $P = 1\,910$ kgf, hallamos la influencia de la fuerza transversal:

$$\frac{1[910 \cdot 800}{4} + \frac{2 \cdot 800^2}{8} + \frac{3\,(1\,910 : 2)^2 \cdot 2\,000}{16 \cdot 1\,(2\,000 : \sqrt{3})^2} = 542 \cdot 10^3 + 257 \text{ kfg} \cdot \text{cm}.$$

Como se ve, la corrección es insignificativamente pequeña. Si para los mismos datos tomamos a $l = 1$ m, entonces,

Fig. 187.



a) sin tener en cuenta a Q: $\frac{P \cdot 100}{4} + \frac{2 \cdot 100^2}{8} = 542 \cdot 10^3$ kgf·cm, de donde $P = 21\,580$ kgf;

b) teniendo en cuenta a Q: $\frac{P \cdot 100}{4} + \frac{2 \cdot 100^2}{8} + \frac{9P^2}{64 \cdot 1 \cdot 2\,000} = 542 \cdot 10^3$ kgf·cm, de donde $P = 20\,368$ kgf.

La corrección a cuenta de Q es igual a un 6%.

§ 89. CARGAS LIMITES PARA PORTICOS Y ARCOS. La rotura de un pórtico o arco puede ocurrir para diferentes combinaciones de las fuerzas internas M, Q y N.

Si el material del pórtico o del arco es frágil, nos limitaremos solamente al examen de los casos cuando la mayor tensión reducida es igual a la de borde y el material sigue aproximadamente la ley de Hooke hasta la rotura. La condición (10.11) de estado límite de la sección, es también la condición de estado límite del pórtico o arco. El parámetro general de la carga fija límite se determina por el mayor valor positivo y negativo del primer miembro de (10.10), el cual se iguala a la tensión límite de signo correspondiente. De los dos parámetros se elige el menor. Los mayores valores de la magnitud, contenida en el primer miembro de (10.10), se establecen por su diagrama. El parámetro general de la carga rodante límite puede ser determinado por medio de las líneas de influencia de las tensiones de borde, por las cuales se encuentran sus mayores valores. Estas tensiones de borde, así como en el caso de carga fija, se igualan a las tensiones límites de signo correspondiente y de los dos parámetros se elige el menor.

La posibilidad de utilizar las líneas de influencia de las tensiones de borde se desprende de la dependencia lineal de las tensiones, debidas a las fuerzas internas M y N. Por eso, las líneas de influencia de las tensiones de borde pueden ser empleadas si los desplazamientos del pórtico en el estado límite son tales que el principio de independencia de acción de las fuerzas para el cálculo de las fuerzas internas M y N es aún válido.

Si el material del pórtico es plástico, entonces, el estado límite de la sección, según (10.17), será también la condición del estado límite

del pórtico:

$$M_{1\text{fm}} + \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^2_{1\text{fm}} \sigma^f}{\delta\,(\tau^f)^2} + \frac{N^2_{1\text{fm}}}{4\delta\sigma^f} = W_{\text{pl}} \sigma^f. \qquad (10.24)$$

Sustituyendo a $\tau^f = \xi\sigma^f$, la presentamos en la forma:

$$\frac{M_{1\text{fm}}}{W_{\text{pl}}} \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + W_{\text{pl}} \left(\frac{3}{16\delta\xi^2} \cdot \frac{Q^2_{1\text{fm}}}{M^2_{1\text{fm}}} + \frac{1}{4\delta} \cdot \frac{N^2_{1\text{fm}}}{M^2_{1\text{fm}}} \right)} \right] = \sigma^f. \qquad (10.25)$$

En el caso de carga fija, los valores mayores de las magnitudes contenidas en los primeros miembros de (10.24) y (10.25) pueden ser hallados construyendo los diagramas de estas magnitudes o calculando sus ordenadas, a elección, para ciertas secciones en las cuales se esperan los mayores valores de estas magnitudes.

Otra será la cuestión en el caso de carga rodante. Incluso si se supone que los desplazamientos del pórtico, en el estado límite, permiten emplear el principio de independencia de acción para el cálculo de las fuerzas internas, de todas maneras, no podremos emplearlo para el cálculo de los valores contenidos en los primeros miembros de (10.24) y (10.25), por cuanto ellos dependen no linealmente de dichas fuerzas internas. Esto significa que la determinación de los mayores valores de estas magnitudes por las líneas de influencia, *en principio*, ya no es posible. Tendremos que examinar por separado las diferentes posiciones de la carga rodante. No obstante, por cuanto en comparación con la de $M_{1\text{fm}}$ la influencia de $N_{1\text{fm}}$ y $Q_{1\text{fm}}$ en muchos casos, puede ser no muy grande, entonces, el problema sobre el mayor valor de las magnitudes contenidas en los primeros miembros de (10.24) y (10.25) puede ser resuelto, *con aproximación*, por la posición teórica de la carga, determinada por la línea de influencia del momento. El resultado del cálculo obtenido con tal procedimiento, del mismo modo que durante el cálculo de vigas, puede ser precisado con aproximaciones sucesivas, para lo cual es necesario colocar los valores Q^* y N^*, correspondientes a la posición teórica de la carga, determinada por la l.i. del momento M, en (10.24) en el lugar de uno de los factores $Q_{1\text{fm}}$ y $N_{1\text{fm}}$ y obtener la expresión en la forma:

$$M_{1\text{fm}} + \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^* Q_{1\text{fm}} \sigma^f}{\delta\,(\tau^f)^2} + \frac{N^* N_{1\text{fm}}}{4\delta\sigma^f} = W_{\text{pl}} \sigma^f. \qquad (10.26)$$

Luego, construir la línea de influencia del primer miembro de (10.26), a la cual designaremos por l.i. de D, por la ecuación

$$\text{l.i. de } D = \text{l.i. de } M + \frac{3}{16} \cdot \frac{Q^* \sigma^f}{\delta\,(\tau^f)^2} (\text{l.i. de } Q) + \frac{N}{4\delta\sigma^f} (\text{l.i. de } N). \qquad (10.27)$$

Por esta l. i. se coloca la carga en la segunda posición teórica y se determina el valor máximo del primer miembro de (10.26).

Si en esta segunda posición teórica de la carga rodante los nuevos valores de Q^{**} y N^{**} se diferencian sustancialmente de los de Q^*

y N * en la primera posición, entonces, el cálculo se puede hacer más exacto adoptando para (10.27) en lugar de Q * y N * sus nuevos valores Q ** y N **.

En aquellos casos, cuando el cálculo se efectúa sin tener en cuenta a $N_{\text{lím}}$ y $Q_{\text{lím}}$, el error relativo es aproximadamente igual a:

$$A = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 4W_{\text{pl}}\left(\frac{3}{16\delta\xi^2}\cdot\frac{Q^2_{\text{lím}}}{M^2_{\text{lím}}} + \frac{1}{4\delta}\cdot\frac{N^2_{\text{lím}}}{M^2_{\text{lím}}}\right)}\right]. \quad (10.28)$$

El cálculo de arcos triarticulados se realiza en forma análoga al de pórticos. Sólo es necesario tener en cuenta, que en los arcos la influencia de $N_{\text{lím}}$ y $Q_{\text{lím}}$, como norma, es mayor que en los pórticos.

Las fórmulas de cálculo de los pórticos y arcos por el primer estado límite de cálculo, pueden ser compuestas sobre la base en las condiciones obtenidas de sus estados límites. Para esto, igual que en el § 88, es necesario sustituir respectivamente a $M_{\text{lím}}$, $Q_{\text{lím}}$ y $N_{\text{lím}}$ por M, Q y N debidos a las cargas teóricas y σ^f, σ^{res} y τ^f, por las resistencias de cálculo multiplicadas por el coeficiente de condiciones de trabajo. Así, por ejemplo, de (10.25), obtenemos que

$$\frac{M}{W_{\text{pl}}}\left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + W_{\text{pl}}\left(\frac{3}{16\delta\xi^2}\cdot\frac{Q^2}{M^2} + \frac{1}{4\delta}\cdot\frac{N^2}{M^2}\right)}\right] \leqq mR. \quad (10.25')$$

Señalemos también aquí, que todo lo dicho con relación a cada condición de estado límite, es también justo para la fórmula de cálculo por el primer estado límite teórico obtenida de él.

§ 90. CARGAS LIMITES PARA LAS ARMADURAS. La rotura de una armadura se produce al romperse una de sus barras. La carga límite para la armadura puede ser determinada por la magnitud de la fuerza longitudinal en esta barra en el momento de su rotura. En este caso, la fuerza longitudinal límite, deberá ser expresada en forma general por medio del parámetro de la carga dada. La carga límite se establece por las igualdades (10.1) y (10.2), las cuales se escriben así:

para materiales frágiles

$$\left.\begin{aligned} &\frac{N_{\text{lím}}}{F} = \sigma^{res}_{tr} \text{ a la tracción;} \\ &\frac{N_{\text{lím}}}{F}\cdot\frac{\sigma^{res}_{tr}}{\sigma_{cr}} = \sigma^{res}_{tr} \text{ a la compresión;} \end{aligned}\right\} \quad (10.29)$$

para materiales plásticos

$$\left.\begin{aligned} &\frac{N_{\text{lím}}}{F} = \sigma^f \text{ a la tracción;} \\ &\frac{N_{\text{lím}}}{F}\cdot\frac{\sigma^f}{\sigma_{cr}} = \sigma^f \text{ a la compresión.} \end{aligned}\right\} \quad (10.30)$$

En todos los casos, la cuestión se reduce a la determinación de los mayores valores de las magnitudes contenidas en los primeros miembros de las igualdades (10.29) y (10.30). En el caso de una carga fija es necesario determinarlos para cada barra de la armadura. En el caso de carga rodante, pueden ser empleadas las líneas de influencia de las fuerzas longitudinales en las barras de las armaduras, si adoptamos que también en el estado límite, el principio de independencia es correcto.

Durante el cálculo de armaduras por el primer estado límite, las fuerzas longitudinales en las barras deberán ser determinadas por la carga dada y, las correspondientes características del material deberán ser tomadas con el coeficiente de homogeneidad y de condiciones de trabajo. En este caso, los primeros miembros de (10.29) y (10.30) deberán ser iguales o menores que los segundos.

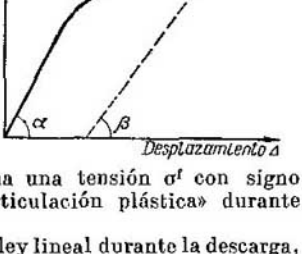
§ 91. DEFORMACIONES Y TENSIONES REMANENTES EN LOS SISTEMAS DE MATERIALES PLASTICOS DESPUES DE REDUCIR LA CARGA. Cualquier carga del sistema más allá del límite de elasticidad del material, cualquiera que sea el lugar, *siempre* produce deformaciones remanentes y, *como norma*, tensiones remanentes. Los casos particulares de deformaciones remanentes sin tensiones remanentes siempre tienen lugar en las armaduras isostáticas y, a veces, en los sistemas hiperestáticos, lo cual es rarísimo, como por ejemplo, en el sistema representado en la fig. 458 con barras de igual longitud.

Al reducir la carga, el material se comporta como elástico con el módulo de elasticidad inicial. A consecuencia del endurecimiento por deformación en frío del material aparece un endurecimiento peculiar de la propia estructura, la que al reducir la carga, se comporta también como elástica, pero sólo hasta que no surja en cualquier punto durante dicha descarga, una tensión mayor que el límite de fluidez, con el signo contrario al que ella tenía hasta la descarga. En tales casos, se dice que la descarga se cumple por ley lineal. Al principio de la descarga de la estructura, el diagrama P, Δ (fig. 188) es lineal. Pero esta ley lineal al principio de la descarga puede diferenciarse de la ley lineal al iniciar la carga. La cuestión radica en que en casos aislados, en ciertas zonas de las secciones, en el momento inicial de la descarga, por una ley elástica, las tensiones iguales a σ^f, deberían incrementarse numéricamente, lo cual, es físicamente imposible. Durante la descarga por la ley lineal estas zonas de las secciones deberán ser como excluidas del trabajo, como si la sección se disminuyera y la descarga de la estructura en el diagrama P, Δ se efectuara por ley lineal con un ángulo de inclinación hacia el eje de desplazamientos (fig. 188). Tal caso tendrá lugar cuando la línea neutra de la articulación plástica no coincida con la línea neutra del diagrama de σ por el cálculo elástico, basado en el diagrama lineal de deformación bajo carga, por ejemplo, en el caso de flexión simple de una barra, para la cual el eje central de la sec-

ción transversal, perpendicular al plano de flexión, divide a la sección en partes desiguales. En el caso de flexión simple, la porción desconectada de la sección estará comprendida, en lo fundamental, entre las líneas neutras de la «articulación plástica» y el diagrama de σ por el cálculo elástico (v. fig. 190).

Si durante la descarga por la ley lineal, en cualquiera de las secciones, las tensiones reducidas resultan mayores que el límite de fluencia y con el signo contrario al que estas tensiones tenían durante la carga, entonces, físicamente, éstas no son posibles y se altera la ley lineal de la descarga. Esta alteración comienza desde el momento en que, por el cálculo elástico, durante la descarga,

Fig. 188



en cualquiera de los puntos se origina una tensión σ^f con signo contrario al de la tensión σ^f de la «articulación plástica» durante la carga.

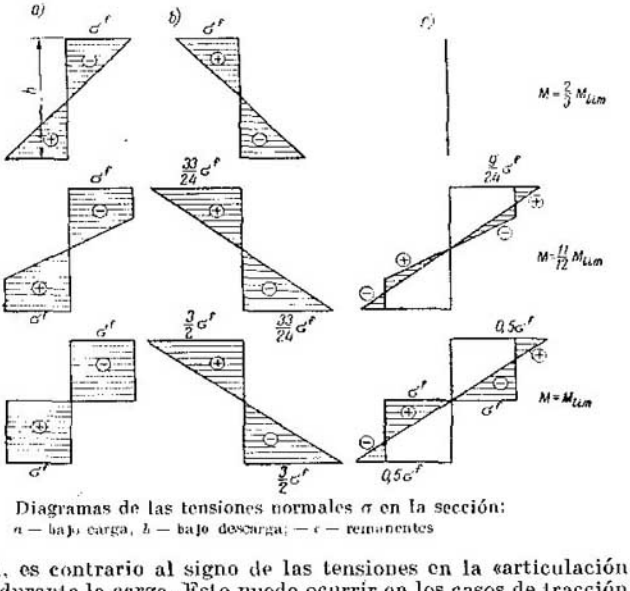
La cuestión sobre la variación de la ley lineal durante la descarga, que tiene lugar al inicio de la carga (v. fig. 188) y la alteración de la ley lineal de la descarga, puede ser resuelta con aproximación, sobre la base del análisis de las tensiones normales en la sección de la barra, por cuanto, al determinar las tensiones reducidas, las tensiones tangenciales de la flexión, frecuentemente, desempeñan un papel insignificante y, a veces, son iguales a cero.

Para tal resolución, es necesario hallar del cálculo por el estado elástico, durante la descarga en las secciones más tensionadas, el diagrama de σ y trazarlo sobre el diagrama de tensiones elástico-plásticas o plásticas σ durante la carga, esto es, obtener el diagrama de las tensiones remanentes $\Delta\sigma$. Si en este último diagrama las tensiones no superan el límite de fluencia, entonces, la ley lineal de descarga corresponde a la ley lineal en el momento inicial de la carga y no se altera hasta el final de la descarga.

Pero si en el diagrama $\Delta\sigma$ las tensiones resultan mayores que σ^f y además, del mismo signo, que las tensiones σ^f de la «articulación plástica», entonces, la ley lineal de la descarga no corresponde a la del momento inicial de la carga. La ley lineal de la descarga se altera en el caso, cuando algunas tensiones por el diagrama $\Delta\sigma$ superan σ^f con el signo contrario al de σ^f en la «articulación plástica».

Con otras palabras, la ley lineal de la descarga es igual a la del momento inicial de la carga, sólo cuando el signo de las tensiones en todos los puntos de la sección transversal, para la descarga por la

Fig. 189.



Diagramas de las tensiones normales σ en la sección:
a — bajo carga, b — bajo descarga; — c — remanentes

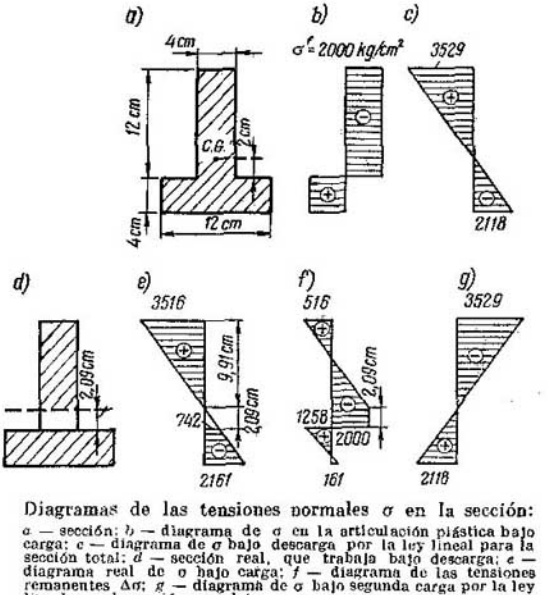
ley lineal, es contrario al signo de las tensiones en la «articulación plástica» durante la carga. Esto puede ocurrir en los casos de tracción o compresión de las barras en las armaduras articuladas y, en el caso de flexión simple de una barra, cuya sección es simétrica con respecto al eje central, perpendicuar al plano de flexión.

Ante todo señalemos que en cualesquiera sistemas isostáticos si la descarga es completa, las tensiones remanentes en las secciones, están autoequilibradas. Debido a esto, en las armaduras articuladas isostáticas no pueden haber tensiones remanentes σ, dado que el diagrama rectangular de ellas con las tensiones σ distintas de cero no se autoequilibra. Durante la flexión de vigas, la disminución del momento flector, durante la descarga, es igual al momento durante la carga. Las tensiones remanentes de borde, después de la descarga, son iguales a:

$$\Delta\sigma \frac{M_{lim}}{W} - \sigma^f = \sigma^f \left(\frac{W_{pl}}{W} - 1\right).$$

Por cuanto la relación $\frac{W_{pl}}{W}$ comúnmente es menor de dos, entonces, las tensiones remanentes no superan el límite de fluidez de signo contrario. En la fig. 189 se muestra el desarrollo de las tensiones remanentes durante la flexión de una viga de sección rectangular, incluso hasta el surgimiento de la «articulación plástica». Es poco probable, por lo visto, la alteración de la linealidad de la descarga como consecuencia de la aparición de σ^f de otro signo, cuando en la

Fig. 190.



Diagramas de las tensiones normales σ en la sección: a — sección; b — diagrama de σ en la articulación plástica bajo carga; c — diagrama de σ bajo descarga por la ley lineal para la sección total; d — sección real, que trabaja bajo descarga; e — diagrama real de σ bajo carga; f — diagrama de las tensiones remanentes $\Delta\sigma$; g — diagrama de σ bajo segunda carga por la ley lineal para la sección completa.

sección actúan M y Q. En el caso de la flexión de una viga de sección asimétrica respecto al eje central perpendicular al plano de flexión (fig. 190), la línea de cero durante la descarga por la ley elástica no coincide con la línea de cero de la «articulación plástica». Por eso, al comienzo de la descarga, en varios sitios de la sección, el signo de la tensión durante la descarga es igual al signo de σ' de la «articulación plástica», lo que conduce a que esta parte de sección se desconecte del trabajo. Así, por ejemplo, para el perfil en forma de T, esa porción estará comprendida desde el ala hasta el centro de gravedad de la sección, e incluso, un poco más arriba de él. En la fig. 190 se expone el diagrama de deformaciones remanentes $\Delta\sigma$, al desconectarse del trabajo la parte de sección con el momento límite $M_{lim} = 768 \cdot 10^3$ kgf·cm.

Si la descarga total se realiza por una recta paralela a la recta inicial de carga, entonces, la segunda sarga será efectuada por esa misma ley lineal, hasta el surgimiento por segunda vez de la misma «articulación plástica».

Pero si la descarga ocurre por una ley lineal distinta de la ley inicial de carga, entonces, la segunda carga en el diagrama P, Δ, al principio se realiza también por una recta, cuyo ángulo de inclinación en este diagrama es mayor que el de la recta de descarga

y será parecido al ángulo de inclinación del origen de la recta de la primera carga, dado que por la fig. 190, *g*, por el cálculo elástico, el diagrama σ de la segunda carga, para la sección completa, sólo en una pequeña parte de la sección, considerablemente menor que durante la primera descarga, tiene el signo que coincide con el de σ^f en el diagrama de tensiones remanentes. Esto significa que se desconectará del trabajo una parte de la sección total, menor que durante la primera descarga. Esta ley de la segunda carga, que al principio es lineal, en algún momento será alterada, puesto que, de lo contrario, las tensiones de borde, por ejemplo, arriba, serían mayores que σ^f.

Si la ley lineal de descarga o de la nueva carga fuera alterada, entonces, durante la segunda carga, aparecería sobre el diagrama un lazo de histéresis. Un cuadro análogo se tendrá también en el caso de compresión o tracción excéntrica, donde la línea de cero de descarga por el cálculo elástico, tampoco coincide con la línea de cero de la «articulación elástica».

§ 92. CARGAS LIMITES EN EL CASO DE REPETICION DE SU APLICACION. La repetición de la aplicación de la carga es necesario entenderla en el sentido, de que cuando la carga alcanza su valor límite, inmediatamente comienza a disminuir no permitiendo que se desarrollen las deformaciones plásticas en las condiciones de un sistema variante. Y así se repite muchas veces. En este caso surge la pregunda, de si no disminuirá la repetición de la aplicación de la carga su valor límite.

Para responder a esta pregunta, examinemos primero los casos cuando en el diagrama P, Δ (véase la fig. 188), la descarga se efectúa por la ley lineal correspondiente a la del inicio de la carga. Por cuanto en estos casos, las siguientes cargas y descargas, después de su primer ciclo, se expresan en el diagrama P, Δ con una misma recta que coincide con la de la primera descarga, entonces, no hay incremento en las deformaciones y tensiones remanentes a causa de la repetición de la carga. El sistema, después del primer ciclo de carga, trabaja bajo esta carga como si fuera elástico. Esto significa que, si se ignora la fatiga del material, entonces, la carga límite no disminuye a causa de su repetición.

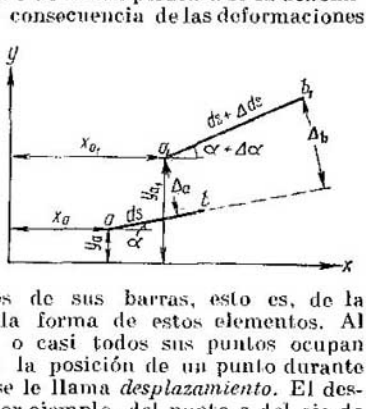
Por cuanto, no obstante, durante las repetidas cargas surge la fatiga en el material con grandes tensiones iguales al límite de fluidez, entonces, al determinar la carga límite de repetición múltiple se debe tener en cuenta la fatiga del material. A consecuencia de la fatiga del material, esta carga límite será menor que la carga de una sola aplicación. Si el número de cargas repetidas no es grande, el cálculo de la fatiga deberá llevarse a cabo por el límite de fatiga con un número de ciclos limitado. Nosotros aquí nos limitaremos a examinar lo esencial del fenómeno sin entrar en mayores detalles. La fatiga del material se manifestará en grado aún mayor, en aquellos casos, cuando los gráficos de carga y descarga dan en el diagrama P, Δ un lazo de histéresis.

La carga del sistema con cargas límites de distinto tipo, determinadas por el cálculo de su aplicación por separado para una vez, para distintas alternaciones entre ellas y para una ley lineal de carga y descarga, después del primer ciclo de carga tampoco disminuirá sus valores si ignoramos la fatiga del material. Pero esta última, indudablemente, tiene lugar. Esta puede surgir, incluso, en el lugar de la «articulación plástica» formada por la acción de una carga límite, a consecuencia de la acción de otra carga límite. Por eso, las cargas límites alternadas pueden ser disminuidas complementariamente debido a la fatiga a que dieron lugar sus alternaciones. Todo lo dicho se refiere también a la carga rodante.

CAPITULO XI * DESPLAZAMIENTOS DE LOS SISTEMAS DE BARRAS PLANOS

§ 93. NOCIONES GENERALES. A la variación de la forma de la estructura por la acción de la carga o de la temperatura se la denomina *deformación*. Esta ocurre como consecuencia de las deformaciones

Fig. 191



de los elementos infinitesimales de sus barras, esto es, de la variación de las dimensiones y la forma de estos elementos. Al deformarse una estructura, todos o casi todos sus puntos ocupan nuevas posiciones. Al cambio de la posición de un punto durante la deformación de una estructura se le llama *desplazamiento*. El desplazamiento de cualquier punto, por ejemplo, del punto a del eje de una barra (fig. 191), se determina con la variación de sus coordenadas x_a e y_a. El vector aa_1, donde a es la posición inicial del punto y a_1, la posición después de la deformación, se llama *vector del desplazamiento completo del punto y, a su longitud, desplazamiento progresivo completo del punto*. A la componente rectangular del vector del desplazamiento completo del punto en la dirección fijada se la llama *vector de desplazamiento* y, a su longitud, *desplazamiento progresivo por la dirección dada*.

El gráfico de los desplazamientos de los puntos de los ejes de las barras por la dirección fijada, trazados del esquema de la estructura no deformada o las proyecciones de estos puntos sobre la recta

perpendicular a la dirección de las traslaciones, se llama *diagrama de desplazamientos*.

La posición de cualquier línea material o parte de la estructura en estado deformado se determina por el desplazamiento de los puntos pertenecientes a éstas. Así, por ejemplo, la posición del elemento lineal *ab* que une dos puntos sobre el eje de una barra, después de la deformación de la estructura se determina por los desplazamientos de los puntos *a* y *b* (fig. 191). Se llama *desplazamiento angular* o simplemente ángulo de giro del elemento lineal al ángulo $\Delta\alpha$, formado por la nueva dirección del elemento lineal y su dirección inicial. Este ángulo puede ser expresado por medio del desplazamiento de los extremos del elemento lineal *a* y *b* en la dirección perpendicular a su posición inicial:

$$\operatorname{sen} \Delta\alpha = \frac{\Delta_b - \Delta_a}{ds\left(1 + \frac{\Delta\, ds}{ds}\right)}. \qquad (11.1)$$

Si aproximamos el punto *b* al *a*, en el límite obtendremos la expresión para el ángulo de giro de la tangente al eje de la barra en el punto *a*. Señalemos que la expresión $\frac{\Delta_b - \Delta_a}{ds}$ es igual a la tangente del ángulo de inclinación de la cuerda en el diagrama de desplazamientos por la dirección perpendicular a la posición inicial del elemento *ab*, construido sobre la línea paralela a él, y, en el límite, es la tangente del ángulo de inclinación de la tangente a este diagrama en el punto *a*.

El ángulo de giro del elemento lineal de la sección transversal, en el plano del sistema, dispuesto sobre el eje de la barra, se diferencia del ángulo de giro de la tangente en el ángulo medio de dislocación γ_{med}.

El estudio de los desplazamientos de las estructuras es indispensable para:

1) la apreciación de la rigidez de las estructuras y el cálculo de éstas por el segundo estado límite de cálculo;

2) la confrontación de las traslaciones teóricas y experimentales, cuyo fin es el control de las estructuras una vez construidas y al cabo de un largo tiempo de servicio;

3) el cálculo de sistemas hiperestáticos, por cuanto las ecuaciones complementarias para descubrir la indeterminabilidad estática, son condiciones impuestas a los desplazamientos del sistema.

La letra Δ con diferentes índices, en adelante servirá para designar a cualquier desplazamiento progresivo y angular. En aquellos casos cuando se examina un desplazamiento concreto originado por una causa dada, su designación irá acompañada con dos índices Δ_{km}. El primer índice *k*, indicará la dirección del desplazamiento y, el segundo *m*, la causa que lo produce. El desplazamiento originado por una sola fuerza P_k en dirección de ésta se designa con Δ_{kk} y se llama *desplazamiento propio* y, el desplazamiento debido a una fuerza

P_m en la dirección de otra fuerza P_k se designa por Δ_{km} y se llama *desplazamiento suplementario*. Los desplazamientos producidos por una sola fuerza, correspondientes a la unidad de esta fuerza, se denominan unitarios (específicos) y se designan con la letra δ. Los desplazamientos unitarios pueden ser también propios $\delta_{kk} = \frac{\Delta_{kk}}{P_k}$ y suplementarios $\delta_{km} = \frac{\Delta_{km}}{P_m}$.

En adelante, examinaremos sólo los sistemas capaces de deformarse linealmente, para los cuales es aplicable el principio de independencia de acción de las fuerzas. En estos sistemas, cualquier desplazamiento Δ_i debido a varias fuerzas $P_1, \ldots, P_n$ por una dirección fijada, es función lineal de estas fuerzas:

$$\Delta_i = \delta_{i1}P_1 + \delta_{i2}P_2 + \ldots + \delta_{in}P_n, \qquad (11.2)$$

donde $\delta_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{P_k}$ Δ es el desplazamiento unitario debido a la fuerza P_k.

Para el desplazamiento progresivo total la fórmula (11.2) es válida, sólo en aquellos casos particulares, cuando la dirección del desplazamiento total no depende de las fuerzas externas, por ejemplo, en el caso de flexión de vigas para las suposiciones comúnmente aceptadas.

§ 94. TRABAJO DE LAS FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS. Los métodos generales de determinación de los desplazamientos en los sistemas capaces de deformarse linealmente, se basan en el análisis del trabajo de las fuerzas externas e internas de acción recíproca entre las partículas materiales del sistema. Las fuerzas externas efectúan el trabajo en los desplazamientos de sus puntos de aplicación al sistema y, las internas, en las deformaciones.

El trabajo se llama *real o efectivo*, si lo realizan las fuerzas dadas en el proceso de deformación de la estructura en los desplazamientos y deformaciones provocados por estas fuerzas. El trabajo se llama *posible*, si lo realizan las fuerzas dadas en los desplazamientos y deformaciones provocados por otras fuerzas externas o por otras causas.

Al trabajo de las fuerzas externas lo designaremos con la letra T y al de las internas, con la letra V.

El trabajo efectivo, si se considera debido a una o varias fuerzas, se designa con la letra T sin índices y, con dos índices idénticos del grupo de fuerzas que lo realiza, si tales grupos son varios.

El trabajo posible se anota con la letra T y dos índices diferentes, esto es, T_{km}. El primer índice k, señala que fuerzas realizan el trabajo y el segundo m, la causa que origina el desplazamiento de la posición examinada.

§ 95. FUERZAS GENERALIZADAS Y DESPLAZAMIENTOS GENERALIZADOS. Como es sabido, se llama trabajo mecánico de una fuerza de magnitud variable en un camino curvilíneo finito al límite de la suma de los trabajos elementales $dT = Pds \cos(P, v)$, que representan el producto de la magnitud de la fuerza, en el momen-

to dado, por la distancia infinitesimal y el coseno del ángulo formado por la dirección de la fuerza y la tangente a la trayectoria (velocidad). Se llama trabajo mecánico de una fuerza de magnitud y dirección constantes, al producto de la fuerza por la proyección de la trayectoria sobre la dirección de esta fuerza.

El trabajo de varias fuerzas es igual a la suma del trabajo de cada una de ellas por separado. El trabajo de varias fuerzas constantes es cómodo representarlo como un producto monomio de dos magnitudes escalares, precisamente, al de cierta fuerza *sustituyente* imaginaria P^*, dependiente del grupo de fuerzas al que representa en forma global indirectamente y, cierto *desplazamiento sustituyente* Δ^* que depende de las traslaciones en las cuales las fuerzas dadas realizan el trabajo:

$$\Sigma P_k \Delta_k = P^* \Delta^*. \qquad (11.3)$$

A éstos fuerzas y desplazamientos sustituyentes, es costumbre llamarlos *fuerzas y desplazamientos generalizados.*

Examinemos algunos casos simples. Supongamos pue dos fuerzas P, que actúan en los puntos a y b se trasladaron a los puntos a_1 y b_1 (fig. 192, *a*). El trabajo de estas fuerzas es

$$P\Delta_1 + P\Delta_2 = P\,(\Delta_1 + \Delta_2) = P^*\Delta^*.$$

Esto significa, que la magnitud P se puede tomar como fuerza generalizada P^* y el desplazamiento recíproco $\Delta_1 + \Delta_2$ de los puntos a y b por la dirección de las fuerzas P, como desplazamiento generalizado Δ^*.

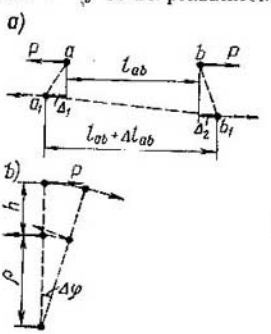


Fig. 192

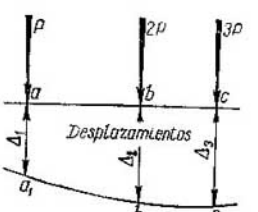


Fig. 193

Examinemos ahora el trabajo de un par de fuerzas al girar un segmento a cuyos extremos están aplicadas estas fuerzas que giran junto con el segmento (fig. 192, *b*):

$$P\,(\rho + h)\Delta\varphi - P\rho\Delta\varphi = Ph\Delta\varphi.$$

En este caso, el momento del par $M = Ph$ y el ángulo de giro $\Delta\varphi$ pueden ser tomados, respectivamente, como fuerza y desplazamiento generalizados.

Por fin, si tenemos un grupo de fuerzas (fig. 193) y las traslaciones por la dirección de cada una de las fuerzas son Δ_1, Δ_2 y Δ_3, entonces, el trabajo de este grupo es igual a

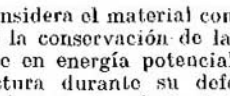
$$P\Delta_1 + 2P\Delta_2 + 3P\Delta_3 = P\,(\Delta_1 + 2\Delta_2 + 3\Delta_3) = P^*\Delta^*,$$

donde $P^* = P$ es la fuerza generalizada y $\Delta^* = \Delta_1 + 2\Delta_2 + 3\Delta_3$ la traslación generalizada.

La expresión del trabajo de las fuerzas en forma de producto de la fuerza generalizada por el desplazamiento generalizado permite, en adelante, no hacer distinciones entre la fuerza generalizada y la fuerza simple y entre el desplazamiento generalizado y el desplazamiento simple. Por cuanto las demostraciones de distintas reglas con una fuerza simple son más evidentes, entonces, nosotros, frecuentemente, las vamos a hacer también así, extendiendo las deducciones obtenidas a las fuerzas y traslaciones generalizadas.

§ 96. TRABAJO EFECTIVO DE LAS FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS. Trabajo efectivo de las fuerzas externas, es el trabajo que éstas realizan en los desplazamientos causados por ellas mismas. Las fuerzas externas, deformando la estructura (fig. 194) reali-

Fig. 194



zan un trabajo positivo. Si se considera el material como idealmente elástico, entonces, por la ley de la conservación de la energía, este trabajo se transforma totalmente en energía potencial de deformación, acumulada por la estructura durante su deformación. La acumulación de energía potencial se suele referir al trabajo de las fuerzas internas de acción recíproca entre las partículas materiales del cuerpo. Estas fuerzas, durante la carga de la estructura, obstaculizando la deformación del cuerpo, cumplen un trabajo negativo. Durante la descarga, al revés, las fuerzas externas realizan un trabajo negativo y las fuerzas internas de acción recíproca, haciendo volver a la estructura al estado inicial indeformado, realizan un trabajo positivo, con lo que se consume la energía potencial de deformación. De esta manera, el trabajo de las fuerzas internas es igual, pero de signo contrario, al trabajo de las externas y a la energía potencial de deformación, contada desde el estado inicial:

$$T = -V = U, \tag{11.4}$$

donde T es el trabajo de las fuerzas externas;
V, el trabajo de las fuerzas internas;
U, la energía potencial de deformación.

Examinemos al principio el trabajo de una sóla fuerza P de dirección constante (fig. 195), en el desplazamiento causado por ella misma en su dirección.

Es conocido que el trabajo de una fuerza es igual al área del diagrama $P = f(\Delta)$ (fig. 195, *b*):

$$T = \int_0^{\Delta_{kk}} P\, d\Delta = \eta P_k \Delta_{kk}, \qquad (11.5)$$

donde η es el coeficiente de llenura del diagrama.

Fig. 195

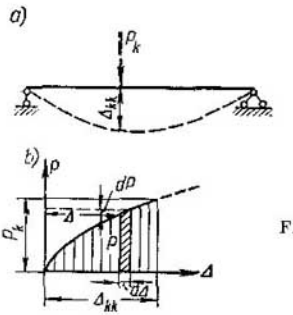
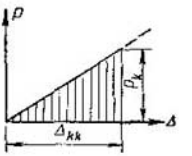


Fig. 196



Se llama trabajo complementario T' a la diferencia entre $P_k\Delta_{kk}$ y T. El trabajo complementario es igual al área del diagrama $\Delta = f_1(P)$

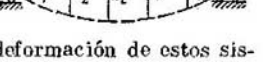
$$T' = P_k\Delta_{kk} - T = \int_0^{P_k} \Delta\, dP. \qquad (11.6)$$

Para los sistemas que se deforman por ley lineal $\Delta = cP$ (fig. 196) y

$$T = \int_0^{\Delta_{kk}} \frac{\Delta}{c}\, d\Delta = \frac{\Delta_{kk}^2}{2c} = \frac{P_k\Delta_{kk}}{2} \text{ (fórmula de Clapeyron).} \qquad (11.7)$$

Examinemos ahora la acción de varias fuerzas simples sobre un sistema capaz de deformarse linealmente (fig. 197). Según se infiere

Fig. 197



de las nociones físicas, tanto el estado de deformación de estos sistemas como la energía potencial de deformación no dependen del orden de aplicación de las fuerzas. Esto significa que el trabajo efectivo de las fuerzas externas, igual a la energía potencial, tampoco depende del orden de aplicación de las fuerzas ni de la ley de variación de éstas. Por eso, para simplificar los razonamientos, supongamos que todas las fuerzas se aplican simultáneamente y varían proporcional-

mente. Por (11.2) tenemos que:

$$\Delta_1 = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \ldots + \delta_{1n}P_n =$$
$$= P_1\left(\delta_{11} + \delta_{12}\frac{P_2}{P_1} + \ldots + \delta_{1n}\frac{P_n}{P_1}\right);$$
$$\Delta_2 = \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + \ldots + \delta_{2n}P_n =$$
$$= P_2\left(\delta_{21}\frac{P_1}{P_2} + \delta_{22} + \ldots + \delta_{2n}\frac{P_n}{P_2}\right);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_n = \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + \ldots + \delta_{nn}P_n =$$
$$= P_n\left(\delta_{n1}\frac{P_1}{P_n} + \delta_{n2}\frac{P_2}{P_n} + \ldots + \delta_{nn}\right).$$

Si las fuerzas varían proporcionalmente, sus relaciones son constantes. Esto significa que el desplazamiento debido a todas las fuerzas por la dirección de una cualquiera P_k es proporcional a ésta. Por consiguiente, el trabajo de todas las fuerzas puede ser representado de la siguiente manera:

$$T = \frac{P_1\Delta_1}{2} + \frac{P_2\Delta_2}{2} + \ldots + \frac{P_n\Delta_n}{2} = \sum\frac{P_k\Delta_k}{2}. \qquad (11.8)$$

La aplicación de las fuerzas en otro orden modifica sumandos aislados, pero siempre la expresión del trabajo puede ser reducida a la forma (11.8).

El trabajo efectivo de varias fuerzas de dirección constante, cualquiera que sea el orden y la ley de aplicación de éstas, es igual a la semisuma del producto de cada fuerza por el desplazamiento en su dirección, debido a la acción de todas las fuerzas.

La fórmula (11.8) puede ser reducida a la forma (11.7) si introducimos la fuerza generalizada P^* y el desplazamiento generalizado Δ^*:

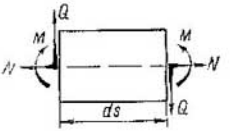
$$\sum\frac{P_k\Delta_k}{2} = \frac{1}{2}P^*\left(\Delta_1\frac{P_1}{P^*} + \Delta_2\frac{P_2}{P^*} + \ldots + \Delta_n\frac{P_n}{P^*}\right) = \frac{P^*\Delta^*}{2}.$$

El trabajo efectivo de una fuerza exterior generalizada en el desplazamiento generalizado es igual a la mitad de su producto.

Expresemos el trabajo de las fuerzas externas dadas, por medio de las fuerzas internas originadas por ellas. Para esto, separemos del sistema el elemento infinitesimal *ds* de una barra recta y apliquémosle las fuerzas internas N, M y Q, que con respecto al elemento son fuerzas externas (fig. 198). Las fuerzas N originan el alargamiento del elemento sin girar sus secciones extremas, los momentos M provocan el giro de las secciones extremas sin desplazamiento progresivo de los puntos axiales y las fuerzas Q originan desplazamiento y distorsión de las secciones. En la figura, convencionalmente, se representa el ángulo medio de dislocación γ_{med}. Expresemos la energía potencial del elemento de una barra recta por medio del trabajo de las

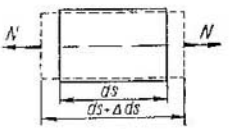
fuerzas N, M y Q, para él externas, cuyas magnitudes se adoptan como fuerzas generalizadas.

Fig. 198



Debido a la fuerza longitudinal N:

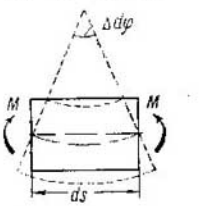
$$dU_N = \frac{N\Delta ds}{2} = \frac{N}{2} \cdot \frac{N\,ds}{EF}. \qquad (11.9)$$



En los desplazamientos debidos a N, las fuerzas M y Q no realizan trabajo.

Debido al momento M:

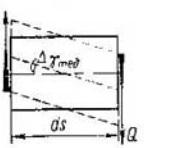
$$dU_M = \frac{M\Delta d\varphi}{2} = \frac{M}{2} \cdot \frac{M}{EJ} ds. \qquad (11.10)$$



En los desplazamientos debidos a M, las fuerzas N y Q no realizan trabajo.

Debido a la fuerza transversal Q:

$$dU_Q = \frac{Q\,ds\Delta\gamma_{med}}{2} = \frac{Q}{2}\,\mu\,\frac{Q\,ds}{GF}. \qquad (11.11)$$



donde μ es el coeficiente de corrección, determinado más adelante, por el trabajo efectivo de las tensiones tangenciales distribuidas por la sección. También aquí, el trabajo de las fuerzas N y M en los desplazamientos debidos a Q es igual a cero.

Integrando las expresiones halladas por los paneles de la barra y sumando los resultados obtenidos por todas las barras, se obtiene la energía potencial total de deformación del sistema. Por cuanto la energía potencial de deformación es igual al trabajo de las fuerzas externas e igual en valor absoluto al trabajo de las fuerzas internas, pero de signo contrario, entonces podemos escribir

$$T = U = -V = \sum \int \frac{N^2}{2EF} ds + \sum \int \frac{M^2}{2EJ} ds + \sum \int \mu \frac{Q^2}{2GF} ds. \qquad (11.12)$$

De esta expresión se desprende que el trabajo efectivo de las fuerzas externas y la energía potencial de deformación del sistema siempre son positivas y no se someten al principio de independencia de acción de las fuerzas, esto es, en el caso de acción de varias fuerzas, hablando en general, no son iguales a la suma de los sumandos cuando estas fuerzas actúan por separado. La cuestión radica en que, aunque las fuerzas internas responden al principio de independencia de acción de las fuerzas, esto es, por ejemplo, $M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n$, de todos modos, el cuadrado de esta magnitud

en la formula (11.12) no es igual a la suma de los cuadrados de los sumandos. Sólo en aquellos casos, cuando la suma de las integrales de los productos apareados de las magnitudes de las fuerzas internas provocadas por diferentes cargas se convierten en cero, el trabajo y la energía potencial debidos a varias *fuerzas* son iguales a la suma de estas magnitudes debidas a cada fuerza por separado.

Aclaremos ahora el significado del coeficiente μ de irregularidad de distribución de las tensiones tangenciales en el caso de flexión.

Fig. 199

Expresemos el trabajo de la fuerza transversal por medio del trabajo de las tensiones tangenciales (fig. 199). Las tensiones tangenciales, cuando la superficie de la barra está libre de carga con $\tau = \frac{QS_{sec}}{Jb}$, el desplazamiento relativo es $\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{QS_{sec}}{JbG}$.

El trabajo efectivo de las tensiones tangenciales es

$$\int_F \frac{\tau}{2}\, dF\, \frac{\tau}{G}\, ds = \int_F \frac{Q^2 S_{sec}^2}{2GJ^2b^2}\, ds\, dF = \mu \frac{Q^2}{2GF} ds,$$

de donde

$$\mu = \frac{F}{J^2} \int_F \frac{S_{sec}^2}{b^2}\, dF. \qquad (11.13)$$

Para el rectángulo

$$\mu = \frac{bh}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\left[b\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{h}{2}+y\right)\frac{1}{2}\right]^2 b\, dy}{b^2} = 1{,}2.$$

Para el círculo $\mu = \frac{32}{27}$, para los doble T laminados $\mu \approx \frac{F}{F_{par}}$, donde F es la superficie total y F_{par} la superficie de la pared vertical.

Todos los razonamientos fueron efectuados para los sistemas compuestos solamente de barras rectas. Si el sistema contiene barras de gran curvatura, entonces, para éstas, la fórmula del trabajo de las fuerzas externas y de la energía potencial será otra. Como se sabe del curso de resistencia de materiales (fig. 200),

$$\Delta ds = \frac{N}{EF} ds + \frac{M}{EF\rho} ds; \quad \Delta d\varphi = \frac{M}{EJ'} ds + \frac{N\, ds}{EF\rho} + \frac{M}{EF\rho^2} ds,$$

donde ρ es el radio de curvatura de la barra y $J' = \int_F \frac{\rho y^2\, dF}{\rho + y}$.

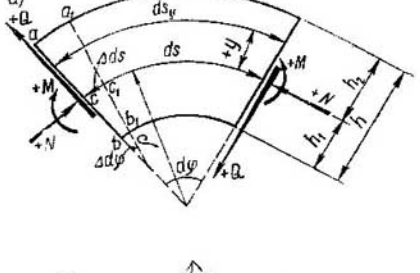


Fig. 200

La energía potencial del elemento de una barra de gran curvatura es igual a:

$$dU = \frac{N\Delta\, ds}{2} + \frac{M\Delta\, d\varphi}{2} + \frac{Q\Delta\gamma^{\text{med}}\, ds}{2} = \frac{N^2}{2EF}\, ds + \frac{M^2}{2EJ'}\, ds + \\ + \mu' \frac{Q^2}{2GF}\, ds + \frac{NM}{EF\rho}\, ds + \frac{M^2}{2EF\rho^2}\, ds.$$

La energía potencial total en todas las barras curvas se determina con la expresión

$$U = \sum \int \frac{N^2}{2EF}\, ds + \sum \int \frac{M^2}{2EJ'}\, ds + \sum \int \mu' \frac{Q^2}{2GF}\, ds + \\ + \sum \int \frac{NM}{EF\rho}\, ds + \sum \int \frac{M^2}{2EF\rho^2}\, ds. \qquad (11.14)$$

Las tensiones tangenciales en una barra curva se determinan por (8.30):

$$\tau = \frac{QS_{\text{sec}}}{J'b} \cdot \frac{\rho^2}{(\rho + y)^2}.$$

La magnitud del coeficiente μ' se determina del mismo modo que para una barra recta:

$$\mu' \frac{Q^2}{2GF}\, ds = \int_F \tau_y\, dF \frac{\tau_y}{2G}\, ds_y = \int_F \frac{Q^2 S_{\text{sec}}^2}{(J')^2 b^2} \cdot \frac{\rho^4}{(\rho + y)^4} \cdot \frac{1}{2G} \cdot \frac{\rho + y}{\rho}\, ds\, dF,$$

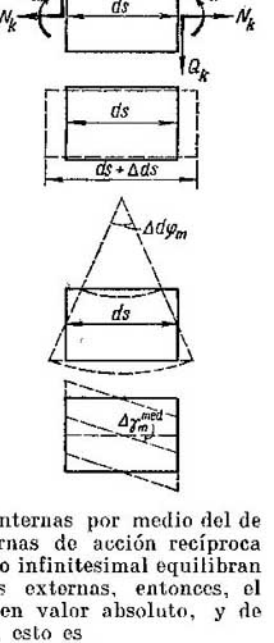
de donde

$$\mu' = \frac{F\rho^3}{(J')^2} \int_F \frac{S_{sec}^2}{b^2 (\rho + y)^3} dF. \qquad (11.15)$$

Las fórmulas para una barra recta, útiles también para una barra de pequeña curvatura se obtienen de las fórmulas (11.14) y (11.15) siendo $\rho = \infty$.

§ 97. TRABAJO POSIBLE DE LAS FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS. El trabajo posible de las fuerzas externas es el trabajo de las fuerzas de dirección constante que actúan sobre el sistema en

Fig. 201



los desplazamientos ocasionados por otras fuerzas u otras causas. En virtud de esto, el trabajo posible es igual a la suma de los productos de cada fuerza P_k por el desplazamiento Δ_{km} en su dirección, es decir,

$$T_{km} = \sum P_k \Delta_{km} = P_k^* \Delta_{km}^*. \qquad (11.16)$$

Hallemos ahora el trabajo posible de las fuerzas internas. Para esto examinamos nuevamente un elemento infinitesimal de una barra recta, con las fuerzas internas aplicadas a él en las secciones, que para este elemento se han hecho externas (fig. 201). Supongamos que como resultado de causas cualesquiera, este elemento infinitesimal adquirió un alargamiento $\Delta\, ds_m$, un ángulo de giro $\Delta\, d\varphi_m$ de las secciones extremas transversales y un desplazamiento medio $\Delta\gamma_m^{med}$.

Expresemos el trabajo de las fuerzas internas por medio del de las externas. Por cuanto las fuerzas internas de acción recíproca entre las partículas materiales en el elemento infinitesimal equilibran a las que para este último son fuerzas externas, entonces, el trabajo de las fuerzas internas es igual, en valor absoluto, y de signo contrario al de las fuerzas externas, esto es

$$dV_{km} = -N_k \Delta\, ds_m - M_k \Delta\, d\varphi_m - Q_k \Delta\gamma_m^{med}\, ds.$$

El trabajo posible de las fuerzas internas de todo el sistema será

$$V_{km} = -\left(\sum \int N_k \Delta\, ds_m + \sum \int M_k \Delta\, d\varphi_m + \sum \int Q_k \Delta\gamma_m^{med}\, ds\right). \qquad (11.17)$$

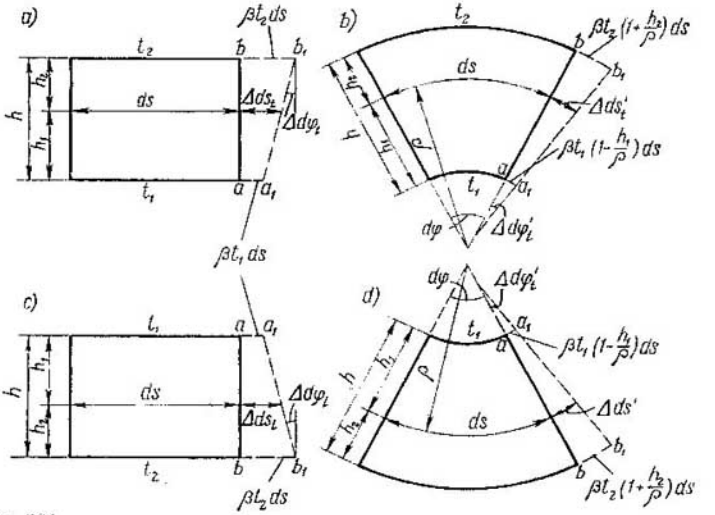


Fig. 202

Los signos de los productos de $N_k \Delta ds_m$, $M_k \Delta d\varphi_m$ y $Q_k \varphi_m^{med}\, ds$ corresponden a los signos del trabajo realizado en los desplazamientos respectivos por las fuerzas N_k, M_k y Q_k, aplicadas al elemento infinitesimal.

Si los desplazamientos complementarios Δ_{km} son causados por la acción de la carga m, entonces, las deformaciones de los elementos infinitesimales debidas a esta carga, expresadas por medio de las fuerzas internas N_m, M_m y Q_m, se determinan del siguiente modo:

a) para las barras rectas:

$$\Delta ds_m = \frac{N_m}{EF} ds; \qquad \Delta d\varphi_m = \frac{M_m}{EJ} ds; \qquad \Delta\gamma_m^{med} = \mu \frac{Q_m}{GF}; \quad (11.18)$$

b) para las barras de gran curvatura:

$$\Delta ds_m = \left(\frac{M_m}{EF} + \frac{M_m}{EF\rho}\right) ds; \qquad \Delta d\varphi_m = \left(\frac{M_m}{EJ'} + \frac{M_m}{EF\rho^2} + \frac{N_m}{EF\rho}\right) ds;$$

$$\Delta\gamma_m^{med} = \mu' \frac{Q_m}{GF}, \quad (11.19)$$

donde ρ es el radio de curvatura de la barra;

J', el momento de inercia convencional.

Si los desplazamientos Δ_{km} son originados por las variaciones de temperatura, entonces, adoptando para las deformaciones térmicas del elemento infinitesimal la hipótesis de las secciones planas, obtenemos que:

a) para las barras rectas (fig. 20 2, *a*, *c*):

$$aa_1 = \beta t_1\, ds; \quad bb_1 = \beta t_2\, ds; \quad \Delta\gamma_t = 0;$$

$$\Delta\, ds_t = \frac{\beta}{h}\,(t_1 h_2 - t_2 h_1)\, ds; \tag{11.20}$$

$$\Delta\, d\varphi_t = \beta\, \frac{t_2 - t_1}{h}\, ds, \tag{11.21}$$

donde β es el coeficiente de dilatación lineal;

t_1 y t_2, los incrementos de temperatura en los puntos de borde de la sección;

h, la altura de la sección;

h_1 y h_2, las distancias desde el centro de gravedad de la sección hasta los puntos de borde.

En las barras rectas y aproximadamente en las de pequeña curvatura, la deformación térmica completa se puede considerar compuesta por dos deformaciones: la de alargamiento $\Delta\, ds_t$, originada por el incremento de temperatura en el eje de la barra $t = \frac{1}{h}\,(t_1 h_2 + t_2 h_1)$ y la de giro recíproco de las secciones $\Delta\, d\varphi_t$, causado por la diferencia de los incrementos de las temperaturas en los puntos de borde;

b) para las barras de gran curvatura (fig. 202, *b*, *d*):

$$aa_1 = \beta t_1 \left(1 - \frac{h_1}{\rho}\right) ds;$$

$$bb_1 = \beta t_2 \left(1 + \frac{h_2}{\rho}\right) ds; \qquad \Delta\gamma_t = 0;$$

$$\Delta\, ds'_t = \frac{\beta}{h}\left[t_1 h_2 \left(1 - \frac{h_1}{\rho}\right) + t_2 h_1 \left(1 + \frac{h_2}{\rho}\right)\right] ds; \tag{11.22}$$

$$\Delta\, d\varphi'_t = \frac{\beta}{h}\left[t_2 \left(1 + \frac{h_2}{\rho}\right) - t_1 \left(1 - \frac{h_1}{\rho}\right)\right] ds. \tag{11.23}$$

donde ρ es el radio de curvatura de la barra;

h_1 y h_2 son las distancias desde el centro de gravedad de la sección hasta los puntos de borde;

t_1 y t_2, los incrementos de temperatura (fig. 202, *b*, *d*).

En la forma general, el trabajo de las fuerzas internas (11.17) en las deformaciones debidas a la carga y a la temperatura se expresa así:

a) para barras rectas y de pequeña curvatura:

$$V_{km} = -\left[\sum \int N_k \frac{N_m}{EF}\, ds + \sum \int M_k \frac{M_m}{EJ}\, ds + \right.$$

$$\left. + \sum \int \mu Q_k \frac{Q_m}{GF}\, ds \mp \sum \int N_k \Delta\, ds_t \mp \sum \int M_k \Delta\, d\varphi_t\right], \tag{11.24}$$

donde $\Delta\, ds_t$ y $\Delta\, d\varphi_t$ se determinan por las expresiones (11.20) y (11.21);

b) para barras de gran curvatura:

$$V_{km} = -\Big[\sum \int N_k \frac{N_m}{EF} ds + \sum \int M_k \frac{M_m}{EJ'} ds + \sum \int \mu' Q_k \frac{Q_m}{GF} ds + \\ + \sum \int N_k \frac{M_m}{EF\rho} ds + \sum \int M_k \frac{N_m}{EF\rho} ds + \sum \int M_k \frac{M_m}{EF\rho^2} ds \mp \\ \mp \sum \int N_k \Delta ds'_t \mp \sum \int M_k \Delta d\varphi'_t \Big], \qquad (11.25)$$

donde $\Delta ds'_t$ y $\Delta d\varphi'_t$ se determinan por las expresiones (11.22) y (11.23).

En ambos casos los signos superiores se emplean para fuerzas internas positivas por la fig. 200, *a* y para temperaturas por la fig. 202, *a*, *b* y los signos inferiores para fuerzas interiores positivas por la fig. 200, *b* y para temperatura por la fig. 200, *c*, *d*.

Si los desplazamientos complementarios Δ_{km} han sido causados por la presencia de deformaciones concentradas finitas de los elementos de la barra en forma de alargamientos Δs_m, de ángulo de fractura $\Delta\varphi_m$ y de desplazamiento absoluto Δn_m, entonces, en las fórmulas de trabajo posible de las fuerzas internas (11.24) y (11.25) es necesario introducir sumandos complementarios

$$\dot{V}_{km} = -[\sum N_k \Delta s_m + \sum M_k \Delta\varphi_m + \sum Q_k \Delta n_m]. \qquad (11.26)$$

Los signos de los productos, contenidos dentro de los signos de suma, corresponden a los signos del trabajo realizado por las fuerzas N_k, M_k, y Q_k aplicadas al elemento deformado.

§. 98 APLICACION DEL PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS POSIBLES A LOS SISTEMAS ELASTICOS DE BARRAS. En los sistemas invariantes elásticos isostáticos e hiperestáticos, sólo los desplazamientos del sistema desde la posición de equilibrio investigada, ocasionados por la acción de una carga cualquiera o por una variación de temperatura, pueden ser desplazamientos posibles que no alteren los vínculos impuestos ni originen el traslado de los apoyos. Tales desplazamientos posibles del sistema de la posición examinada van acompañados con deformación del sistema. Por consiguiente, en tal desplazamiento posible, no sólo las fuerzas externas realizarán trabajo, sino también las internas. Dado que el trabajo de todas las fuerzas en los desplazamientos posibles es igual a cero, entonces,

$$T_{km} + V_{km} = 0,$$

donde T_{km} es el trabajo de las fuerzas externas del estado k en los desplazamientos del estado m y V_{km}, el trabajo de las fuerzas internas del estado k en las deformaciones del estado m.

De esta desigualdad se desprende que

$$T_{km} = -V_{km}.$$

El trabajo posible de las fuerzas externas es igual en valor absoluto y de signo contrario al trabajo posible de las fuerzas internas.

Al utilizar el principio de los desplazamientos posibles, es indispensable que éstos se cuenten desde la posición investigada de equilibrio del sistema y sean infinitesimales. No obstante, por cuanto nosotros examinamos sistemas capaces de deformarse lineal-

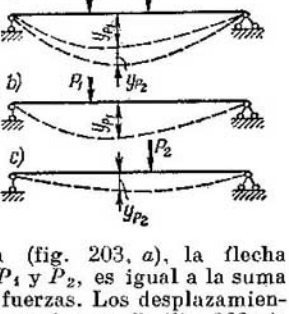


Fig. 203

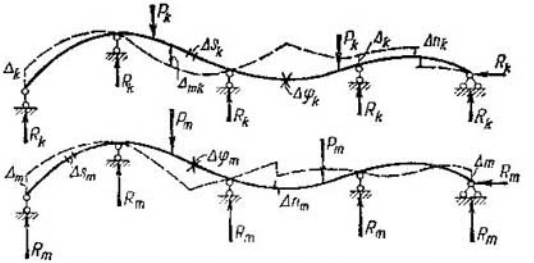
mente, para los cuales es aceptable el principio de independencia de acción de las fuerzas con relación a las traslaciones y deformaciones, como desplazamientos posibles se pueden emplear los pequeños desplazamientos de valores finitos del estado inicial indeformado. Así, por ejemplo, para una viga (fig. 203, *a*), la flecha $y = y_{P_1} + y_{P_2}$ debida a las dos fuerzas P_1 y P_2, es igual a la suma de las flechas debidas a cada una de estas fuerzas. Los desplazamientos y_{P_2} contados desde el estado inicial, causados por P_2 (fig. 203, *c*), al hacer el análisis del equilibrio elástico de la viga bajo la acción de la fuerza P_1, pueden ser tomados en calidad de desplazamientos posibles.

Así mismo, es admisible considerar como desplazamientos posibles los desplazamientos finitos pequeños provocados por la temperatura, los desplazamientos de los apoyos y las deformaciones concentradas contadas desde el estado no deformado del sistema.

§ 99. FORMULA GENERAL DEL TRABAJO POSIBLE. Examinemos dos estados de cualquier sistema isostático o hiperestático (fig. 204). Supongamos que en uno de estos estados, al cual llamaremos estado k, actúan las fuerzas externas efectivas P_k, las reacciones de los apoyos R_k y las fuerzas internas N_k, M_k y Q_k; tienen lugar desplazamientos de los apoyos Δ_k; deformaciones elásticas (alargamientos) $\Delta\, ds_k$, ángulos de giro $\Delta\, d\varphi_k$ de las secciones y desplazamientos medios relativos $\Delta\gamma_k^{med}$; deformaciones concentradas de valor finito (alargamientos) Δs_k, ángulos de fractura $\Delta\varphi_k$, desplazamientos absolutos Δn_k y, por fin, incrementos de temperatura t_k. En el otro estado, al cual llamaremos estado m, tendremos las fuerzas efectivas externas P_m, las reacciones de apoyo R_m; las fuerzas internas N_m, M_m, y Q_m; los desplazamientos de los apoyos Δ_m; las deformaciones elásticas (alargamientos) $\Delta\, ds_m$, los ángulos de giro $\Delta\varphi\, d_m$ de las secciones y los deslizamientos relativos medios $\Delta\gamma_m^{med}$; deformaciones de magnitud finita (alargamientos) Δs_m, los ángulos de fractura $\Delta\varphi_m$, los deslizamientos absolutos Δn_m y los incrementos de temperatura t_m.

En este caso, todos los desplazamientos se consideran pequeños y que admiten el principio de independencia de acción de las fuerzas.

Fig. 204



Para la obtención de la fórmula general del trabajo posible, investigamos el equilibrio del estado k, adoptando en calidad de desplazamientos posibles los desplazamientos del estado m. El trabajo de las fuerzas externas efectivas P_k y de reacción R_k, expresado, en el caso general, en función del trabajo de las fuerzas internas, se escribe empleando las expresiones (11.17) y (11.24) — (11.26).

En el gaso general

$$\sum P_k\Delta_{km}+\sum R_k\Delta_m=\sum\int N_k\Delta\,ds_m+\sum\int M_k\Delta\,d\varphi_m+$$
$$+\sum\int Q_k\Delta\gamma_m^{\text{med}}\,ds.$$

En los sistemas de barras rectas y de pequeña curvatura

$$\sum p_k\Delta_{km}+\sum R_k\Delta_m=\sum\int N_k\frac{N_m}{EF}\,ds+\sum\int M_k\frac{M_m}{EJ}\,ds+$$
$$+\sum\int\mu Q_k\frac{Q_m}{GF}\,ds\mp\sum\int N_k\Delta\,ds_{t_m}\mp\sum\int M_k\Delta\,d\varphi_{t_m}+$$
$$+\sum N_k\Delta s_m+\sum M_k\Delta\varphi_m+\sum Q_k\Delta n_m. \qquad (11.27)$$

En los sistemas de barras de gran curvatura

$$\sum P_k\Delta_{km}+\sum R_k\Delta_m=T_{km}^*+T_{kt_m}+\dot{T}_{km}, \qquad (11.28)$$

donde

$$T_{km}^*=\sum\int N_k\frac{N_m}{EF}\,ds+\sum\int M_k\frac{M_m}{EJ'}\,ds+$$
$$+\sum\int\mu' Q_k\frac{Q_m}{GF}\,ds+\sum\int N_k\frac{M_m}{EF\rho}\,ds+$$
$$+\sum\int M_k\frac{N_m}{EF\rho}\,ds+\sum\int M_k\frac{M_m}{EF\rho^2}\,ds; \qquad (11.29)$$

$$T_{kt_m}=\mp\sum\int N_k\Delta\,ds'_{t_m}\mp\sum\int M_k\Delta\,d\varphi'_{t_m}; \qquad (11.30)$$

$$\dot{T}_{km}=\sum N_k\Delta s_m+\sum M_k\Delta\varphi_m+\sum Q_k\Delta n_m. \qquad (11.31)$$

El signo del producto $R_k\Delta_m$ se determina por el signo del trabajo de la reacción R_k en el desplazamiento Δ_m que le corresponde. Con otras palabras, el desplazamiento Δ_m se considera positivo si su dirección coincide con la de la reacción R_k.

Los signos superiores de (11.27) y (11.30) se emplean para fuerzas sustituyentes (internas) positivas por la fig. 200, *a* y, para la temperatura, por la fig. 200, *a*, *b* y los inferiores, para fuerzas sustituyentes positivas por la fig. 200, *b* y para temperatura, por la fig. 202, *c*, *d*.

De la expresión (11.28) siendo $\rho = \infty$ se obtiene la expresión (11.27).

§ 100. TEOREMAS DE RECIPROCIDAD

1. TEOREMA DE LA RECIPROCIDAD DE LOS TRABAJOS

Examinemos el sistema expuesto en la fig. 204, en dos estados. Al principio estudiemos este sistema en el estado k, empleando como posibles a los desplazamientos del estado m y, luego, en el estado m, empleando como posibles a los desplazamientos del estado k. Por la fórmula de los trabajos posibles (11.28) tendremos que

$$\sum P_k\Delta_{km} + \sum R_k\Delta_m = T^*_{km} + T_{kl_m} + \dot{T}_{km};$$

$$\sum P_m\Delta_{mk} + \sum R_m\Delta_k = T^*_{mk} + T_{ml_k} + \dot{T}_{mk}.$$

Según (11.29), por cuanto en las expresiones de los integrandos el orden de los factores no altera el valor de las integrales, $T^*_{km} = T^*_{mk}$. Por consiguiente:

$$\sum P_k\Delta_{km} + \sum R_k\Delta_m - T_{kl_m} - \dot{T}_{km} =$$

$$= \sum P_m\Delta_{mk} + \sum R_m\Delta_k - T_{ml_k} - \dot{T}_{mk}. \qquad (11.32)$$

Esta igualdad contiene los sumandos complementarios $\dot{T}_{km}$ y $\dot{T}_{mk}$ introducidos por el prof. A.A. Umansky [1]. Si en los estados examinados realizan trabajo sólo las fuerzas externas efectivas P_k y P_m, entonces, la igualdad (11.32) adquiere una forma más simple (teorema de Betty):

$$\sum P_k\Delta_{km} = \sum P_m\Delta_{mk} \quad \text{ó} \quad P^*_k\Delta^*_{km} = P^*_m\Delta^*_{mk}. \qquad (11.33)$$

En este caso, el teorema de la reciprocidad de los trabajos se formula así: *el trabajo posible de las fuerzas externas del estado k en los desplazamientos del estado m es igual al trabajo posible de las fuerzas externas del estado m en los desplazamientos del estado k.*

Por ejemplo. Para el sistema representado en la figura 205 en dos estados, por el teorema de la reciprocidad de los trabajos obtenemos que

$$P_k\Delta_{km} + M_k\beta_m = P_m\Delta_{mk} - M_m\alpha_k.$$

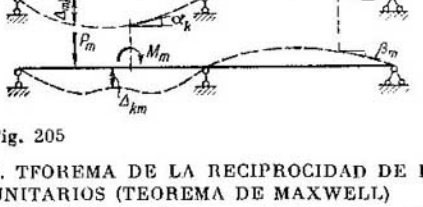


Fig. 205

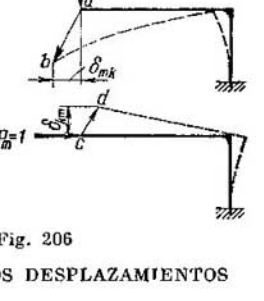


Fig. 206

2. TEOREMA DE LA RECIPROCIDAD DE LOS DESPLAZAMIENTOS UNITARIOS (TEOREMA DE MAXWELL)

Escribimos el teorema de la reciprocidad de los trabajos por medio de los desplazamientos y de las fuerzas generalizadas $P_k^*\Delta_{km}^* = P_m^*\Delta_{mk}^*$.

Dividimos ambas partes de la igualdad por el producto de estas fuerzas generalizadas $P_k^*P_m^*$:

$$\frac{\Delta_{km}^*}{P_m^*} = \frac{\Delta_{mk}^*}{P_k^*}.$$

Designamos $\delta_{km} = \frac{\Delta_{km}^*}{P_m^*}$ y $\delta_{mk} = \frac{\Delta_{mk}^*}{P_k^*}$ y denominamos a estas relaciones desplazamientos generalizados unitarios. La dimensión de los desplazamientos unitarios se desprende de su propia definición.

Dimensión de $\delta_{km} = \frac{\text{dimensión del desplazamiento generalizado } \Delta_{km}^*}{\text{dimensión de la fuerza generalizada } P_m^*}$.

Por consiguiente,

$$\delta_{km} = \delta_{mk}. \qquad (11.34)$$

El desplazamiento generalizado unitario correspondiente a la fuerza generalizada P_k^*, causado por la fuerza generalizada P_m^*, es igual al desplazamiento generalizado unitario correspondiente a la fuerza generalizada P_m^*, debido a la fuerza generalizada P_k^*.

La igualdad (11.34) también es válida para las fuerzas simples. Para estas fuerzas, el desplazamiento unitario δ_{km} por la dirección de la fuerza P_k, debida a la fuerza P_m es igual al desplazamiento unitario δ_{mk} por la dirección de la fuerza P_m, debido a la fuerza P_k.

Ejemplo 17. ¿Cuáles desplazamientos son iguales por el teorema de la reciprocidad de los desplazamientos (fig. 206)?

$\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ son los vectores de los desplazamientos completos del extremo de la barra. El desplazamiento δ_{km} es la proyección vertical del vector del desplazamiento completo $\overline{cd}$ en el estado m, y el dasplazamiento δ_{mk} es la proyección horizontal del vector del desplazamiento completo $\overline{ab}$ en el estado k.

3. TEOREMA DE LA RECIPROCIDAD DE LAS REACCIONES UNITARIAS EN LOS SISTEMAS HIPERESTATICOS (PRIMER TEOREMA DE RAYLEIGH)

Examinemos cualquier sistema hiperestático en los dos estados m y k. Supongamos que en cada estado, por la dirección de uno de los vínculos de apoyo m o k (fig. 207, *a*, *b*), tienen lugar los desplazamientos Δ_m o Δ_k. Estos desplazamientos originan reacciones de los vínculos, de las cuales señalamos sólo la R_{km} del vínculo k por el desplazamiento del m y la reacción R_{mk} del vínculo m por el desplazamiento del k. Componemos la ecuación de los trabajos posibles de las fuerzas externas de cada estado en los desplazamientos del otro:

$$R_{km}\Delta_k = R_{mk}\Delta_m.$$

Dividiendo por $\Delta_k\Delta_m$, obtenemos que

$$\frac{R_{km}}{\Delta_m} = \frac{R_{mk}}{\Delta_k}.$$

Designamos a $r_{km} = \frac{R_{km}}{\Delta_m}$ y a esta relación la llamamos reacción unitaria (específica) de la reacción del vínculo k debida al

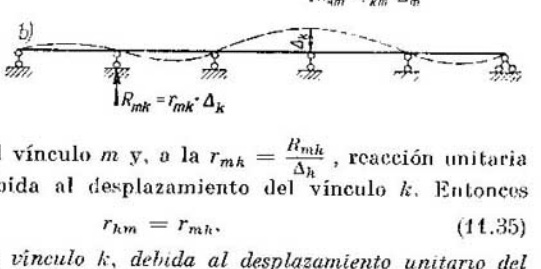


Fig. 207

desplazamiento del vínculo m y, a la $r_{mk} = \frac{R_{mk}}{\Delta_k}$, reacción unitaria del vínculo m debida al desplazamiento del vínculo k. Entonces

$$r_{km} = r_{mk}. \qquad (11.35)$$

La reacción del vínculo k, debida al desplazamiento unitario del vínculo m es igual a la reacción del vínculo m debida al desplazamiento unitario del vínculo k.

La dimensión de la reacción r_{km} es igual a la de la relación $\frac{R_{km}}{\Delta_m}$. Todo lo expuesto es también justo para las reacciones generalizadas con los desplazamientos generalizados que les corresponden.

4. TEOREMA DE LA RECIPROCIDAD DE LAS REACCIONES Y DESPLAZAMIENTOS UNITARIOS (SEGUNDO TEOREMA DE RAYLEIGH)

Examinemos dos estados. En el primero de ellos se ha dado un sólo desplazamiento por la dirección del vínculo k y, en el segundo, una sola fuerza externa P_m (fig. 208, *a*, *b*). Por la ecuación de la

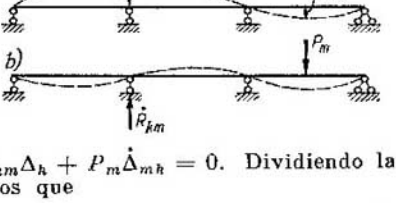


Fig. 208

reciprocidad de los trabajos $\dot{R}_{km}\Delta_k + P_m\dot{\Delta}_{mk} = 0$. Dividiendo la expresión por $P_m\Delta_k$, obtenemos que

$$\dot{r}_{km} = -\dot{\delta}_{mk}, \tag{11.36}$$

donde $\dot{r}_{km} = \frac{\dot{R}_{km}}{P_m}$ es la reacción unitaria del vínculo k debida a la fuerza P_m y $\dot{\delta}_{mk} = \frac{\dot{\Delta}_{mk}}{\Delta_k}$ es el desplazamiento unitario por la dirección de la fuerza P_m, debido al desplazamiento del vínculo de apoyo Δ_k.

Así pues, *la reacción unitaria del vínculo k debida a la fuerza $P_m = 1$ es igual al desplazamiento unitario por la dirección de la fuerza P_m, debido a la traslación del vínculo $\Delta_k = 1$, tomado con signo contrario*. La dimensión de las reacciones $\dot{r}_{km}$ y de los desplazamientos $\dot{\delta}_{mk}$ es igual a la de las relaciones

$$\frac{\dot{R}_{km}}{P_m} \quad \text{y} \quad \frac{\dot{\Delta}_{mk}}{\Delta_k}.$$

La igualdad (11.36) es también válida para las reacciones generalizadas unitarias debidas a las fuerzas externas y para los desplazamientos generalizados unitarios, originados por las traslaciones de los vínculos.

§ 101. FORMULA GENERAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS. Examinemos cualquier sistema bajo la acción de la carga dada P_m, del desplazamiento de los apoyos Δ_m, de las deformaciones concentradas Δs_m, $\Delta\varphi_m$, Δn_m y del incremento de temperatura t_m (fig. 209).

A tal estado lo llamaremos *real*.

Prosiguiendo, examinemos el estado auxiliar k del mismo sistema bajo la acción de una sola fuerza P_k aplicada en cualquier lugar.

A las fuerzas internas del estado real las designaremos con N_m, M_m y Q_m y, a las fuerzas internas del estado auxiliar, por N_k, M_k y Q_k. Estudiaremos el equilibrio estático del estado auxiliar k por el principio de los desplazamientos posibles, adoptando en calidad

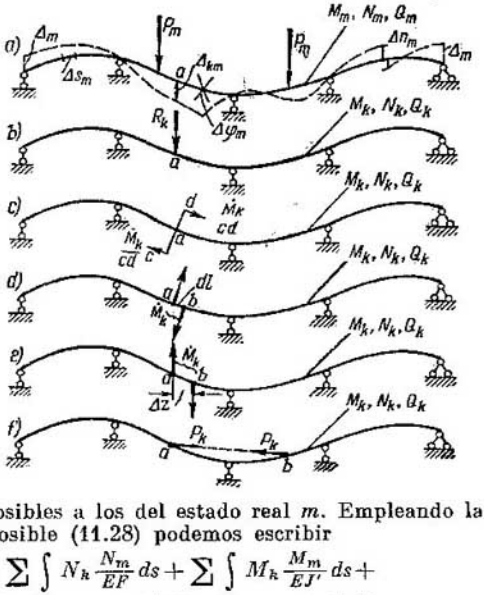


Fig. 209

de desplazamientos posibles a los del estado real m. Empleando la fórmula de trabajo posible (11.28) podemos escribir

$$P_k\Delta_{km}+\sum R_k\Delta_m=\sum\int N_k\frac{N_m}{EF}ds+\sum\int M_k\frac{M_m}{EJ'}ds+$$
$$+\sum\int\mu'\frac{Q_kQ_m}{GF}ds+\sum\int\frac{N_kM_m}{EF\rho}ds+\sum\int\frac{M_kN_m}{EF\rho}ds+$$
$$+\sum\int M_k\frac{M_m}{EF\rho^2}ds\mp\sum\int N_k\Delta\,ds'_{tm}\mp\sum\int M_k\Delta\,d\varphi'_{tm}+$$
$$+\sum N_k\Delta s_m+\sum M_k\Delta\varphi_m+\sum Q_k\Delta n_m. \qquad (a)$$

Dividimos la expresión obtenida por P_k y después de simples transformaciones obtenemos la fórmula general para la determinación de los desplazamientos (Maxwell — Mohr);

$$\Delta_{km}=\sum\int\overline{N}_k\frac{N_m}{EF}ds+\sum\int\overline{M}_k\frac{M_m}{EJ'}ds+\sum\int\mu'\overline{Q}_k\frac{Q_m}{GF}ds+$$
$$+\sum\int\overline{N}_k\frac{M_m}{EF\rho}ds+\sum\int\frac{\overline{M}_kN_m}{EF\rho}ds+\sum\int\overline{M}_k\frac{M_m}{EF\rho^2}ds\mp$$
$$\mp\sum\int\overline{N}_k\Delta\,ds'_{tm}\mp\sum\int\overline{M}_k\Delta\,d\varphi'_{tm}+\sum\overline{N}_k\Delta s_m+$$
$$+\sum\overline{M}_k\Delta\varphi_m+\sum\overline{Q}_k\Delta n_m-\sum\overline{R}_k\Delta_m, \qquad (11.37)$$

donde

$$\overline{N}_k=\frac{N_k}{P_k};\quad \overline{M}_k=\frac{M_k}{P_k};\quad \overline{Q}_k=\frac{Q_k}{P_k};\quad \overline{R}_k=\frac{R_k}{P_k}.$$

En esta fórmula Δ_{km} es el desplazamiento en el estado real m en el lugar de aplicación de la fuerza P_k, por la dirección de esta fuerza. Por cuanto la fuerza P_k está aplicada en un punto cualquiera y su dirección es arbitraria, entonces, la fuerza P_k deberá ser dirigida en la dirección del desplazamiento buscado y aplicada allí, donde nosotros precisamente deseamos determinar el desplazamiento.

Por consiguiente, para la determinación del movimiento de traslación del punto dado por la dirección fijada, es necesario, además del estado real dado m, examinar el estado auxiliar k con la fuerza P_k aplicada en este punto por la dirección del desplazamiento buscado. Luego, expresar a las fuerzas internas $\overline{N}_k$ y $\overline{M}_k$ y $\overline{Q}_k$ en el estado k a través de la fuerza P_k, colocar estas expresiones en la fórmula (11.37) y, después de la integración, obtener el desplazamiento buscado con dimensión de longitud.

Para la determinación del ángulo de giro $\Delta\beta$ del segmento entre los dos puntos de la huella de la sección transversal de la barra, sobre el plano del sistema, es necesario aplicar en lugar de la fuerza P_k un par de fuerzas de momento $\dot{M}_k$, perpendicularmente al segmento (fig. 209, *c*) y a continuación realizar todo lo que fue necesario para el caso de una sola fuerza P_k. Por cuanto en el estado auxiliar, durante la carga con una sola fuerza P_k, la fórmula (11.37) determina el desplazamiento por su dirección, entonces, en el caso de carga con un par de fuerzas, esta fórmula determinará la diferencia de desplazamientos de los dos puntos, dividida por el brazo del par de fuerzas, esto es,

$$\Delta_{km} = \operatorname{sen} \Delta\beta \approx \operatorname{tg} \Delta\beta \approx \Delta\beta.$$

Para la determinación del ángulo de giro de la tangente al eje de la barra en el punto a, es necesario aplicar a los extremos del elemento lineal ab, que une los puntos a y b del eje de la barra, dos fuerzas perpendiculares a dicho segmento, que componen el par de momento $\dot{M}_k$, en lugar de la fuerza P_k (fig. 209, *d*) y así efectuar todas las operaciones requeridas para el caso de una sola fuerza P_k, después de lo cual, se debe pasar al límite cuando el segmento ab tiende a cero. En este caso, por la fórmula (11.37) obtenemos (véase 11.1)

$$\Delta_{km} = \operatorname{sen} \Delta\alpha \left(1 + \frac{\Delta\, dl}{dl}\right).$$

Para la determinación de la tangente del ángulo de inclinación de la cuerda, con respecto al diagrama de desplazamientos construido sobre una base recta, en cualquier dirección, por ejemplo, en la vertical, es necesario aplicar en los puntos del eje del sistema, correspondientes a los desplazamientos de los extremos de la cuerda en el diagrama de desplazamientos, las dos fuerzas que componen el par de momento $\dot{M}_k$ por la dirección fijada de los desplazamientos (fig. 209, *e*) y hacer todo lo que debería hacerse para el caso de una sola fuerza P_k. Si se acercan las fuerzas de este par una hacia la

otra, entonces, para $\Delta z \to 0$, obtenemos la tangente del ángulo de giro de la tangente al diagrama de desplazamientos en el punto a.

Para la determinación de la aproximación entre los puntos a y b, es necesario aplicar a cada uno éstos la fuerza P_k de tal manera, que estas fuerzas estén dirigidas una al encuentro de la otra (fig. 209, *f*).

Por cuanto no siempre está claro, prácticamente, hacia qué lado está dirigido el desplazamiento progresivo o angular buscado, entonces, la dirección de la fuerza P_k o del par de momento $\dot{M}_k$ puede ser tomada arbitrariamente. El signo positivo del resultado, por la fórmula (11.37), indica que los desplazamientos coinciden con las direcciones adoptadas de las fuerzas P_k y del par de momento $\dot{M}_k$, y, el signo negativo, al revés.

La división de la expresión (a) por la fuerza P_k o por el momento $\dot{M}_k$ del par puede ser efectuada formalmente, si consideramos a la fuerza o al momento iguales a la unidad adimensional. En tal caso, en el estado auxiliar k es necesario aplicar la fuerza adimensional $P_k = 1$ o el par de momento adimensional $\dot{M}_k = 1$, que originarán las fuerzas internas $\bar{M}_k$, $\bar{Q}_k$ y $\bar{N}_k$, correspondientes a la unidad de la fuerza P_k o del momento $\dot{M}_k$. Los restantes efectos conservan su aspecto anterior.

Se puede, naturalmente, admitir que la fuerza unitaria $P_k = 1$ tenga dimensión física (kgf, tf), pero, entonces, el producto $1 \cdot \Delta_{km}$ representará un trabajo numéricamente igual a un desplazamiento determinado. Nosotros emplearemos una fuerza unitaria abstracta.

En las estructuras, las barras curvas, frecuentemente, son de reducida curvatura con $\frac{\rho}{h} > 10$. En estas barras la curvatura corrientemente se desprecia. La fórmula (11.37) para $\rho = \infty$ de las fuerzas positivas internas por la fig. 200, *b* y de las variaciones de temperatura de acuerdo con la fig. 202, *c* adquiere el aspecto

$$\Delta_{km} = \sum \int \bar{N}_k \frac{N_m}{EF}\, ds + \sum \int \bar{M}_k \frac{M_m}{EJ}\, ds +$$
$$+ \sum \int \mu \bar{Q}_k \frac{Q_m}{GF}\, ds + \sum \int \bar{N}_k \Delta\, ds_{tm} +$$
$$+ \sum \int \bar{M}_k \Delta\, d\varphi_{tm} + \sum \bar{N}_k\, \Delta s_m + \sum \bar{M}_k \Delta \varphi_m +$$
$$+ \sum \bar{Q}_k \Delta n_m - \sum \bar{R}_k \Delta_m. \qquad (11.38)$$

Aquí $\Delta\, ds_{tm}$ y $\Delta\, d\varphi_{tm}$ se determinan por las expresiones (11.20) y (11.21). Señalamos que en la fórmula de desplazamientos (11.38), el mayor incremento de temperatura se toma coincidente con la fibra traccionada por la acción del momento $\bar{M}_k$.

Para las armaduras articuladas, sólo las fuerzas longitudinales N son diferentes de cero y la fórmula (11.38) adquiere la forma:

$$\Delta_{km} = \sum \bar{N}_{ik} \frac{N_{im}}{E_i F_i} l_i + \sum \bar{N}_{ik} \Delta s_{im} + \sum \bar{N}_{ik} \Delta l_{it} - \sum \bar{R}_k \Delta_m, \quad (11.39)$$

donde $\bar{N}_{ik}$ es la fuerza longitudinal debida a $P_k = 1$;
N_{im}, la fuerza longitudinal debida a la carga P_m;
l_i, la longitud de la i-ésima barra;
E_i y F_i son, respectivamente, el módulo y el área de la sección de la i-ésima barra;
Δs_{im}, el alargamiento forzado (originado, por ejemplo, por la confección incorrecta de los elementos del sistema);
Δl_{it}, el alargamiento libre térmico en la i-ésima barra de la armadura.

Para los elementos que trabajan a la flexión y a la fuerza longitudinal, los cálculos muestran que las integrales que contienen los

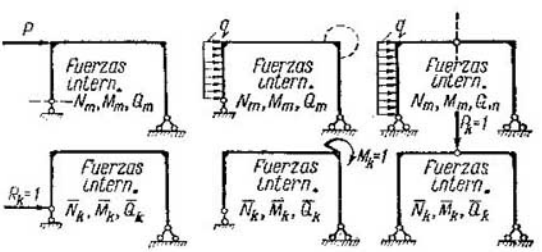


Fig. 210

momentos M son considerablemente mayores que las restantes. Por eso, en adelante, para simplificar el cálculo, la fórmula (11.38) se escribe de la siguiente forma:

$$\Delta_{km} = \sum \int \bar{M}_k \frac{M_m}{EJ} ds + \sum \int \bar{N}_k \Delta\, ds_{im} + \sum \int \bar{M}_k \Delta\, d\varphi_{im} +$$

$$+ \sum \bar{N}_k \Delta s_m + \sum \bar{M}_k \Delta \varphi_m + \sum \bar{Q}_k \Delta n_m - \sum \bar{R}_k \Delta_m. \quad (11.40)$$

Para un correcto empleo de la fórmula de desplazamientos, es necesario imaginarse con claridad el estado auxiliar. En la fig. 210 se exponen los estados auxiliares para algunos casos. Las direcciones de los desplazamientos a determinar se muestran punteadas en los esquemas de los estados reales.

En adelante, para simplificar las inscripciones del diagrama de los esfuerzos $\bar{S}_k$ y S_m por todo el sistema los vamos a designar por $(\bar{S}_k)$ y (S_m), y, a los desplazamientos Δ_{km} debidos a la carga por (11.38) y a las integrales que esta fórmula contiene, las representare-

mos como el producto convencional de los diagramas:

$$\Delta_{km} = \sum \int \overline{M}_k \frac{M_m}{EJ}\, ds + \sum \int \overline{N}_k \frac{N_m}{EF}\, ds + \\ + \sum \int \mu \overline{Q}_k \frac{Q_m}{GF}\, ds = (\boldsymbol{M}_m)\cdot(\overline{\boldsymbol{M}}_k) + (\boldsymbol{N}_m)\cdot(\overline{\boldsymbol{N}}_k) + \\ + (\boldsymbol{Q}_m)\cdot(\overline{\boldsymbol{Q}}_k) = (\boldsymbol{L}_m)\cdot(\overline{\boldsymbol{L}}_k). \qquad (11.41)$$

Ejemplo 18. Determinar la flexión y el ángulo de giro del extremo de la viga y, además, la flexión en el centro de esta misma (fig. 211).

Para la determinación de la flexión en el extremo de la viga empleamos el estado auxiliar con la fuerza $P_k = 1$ (fig. 211, *b*). Tendremos en cuenta sólo

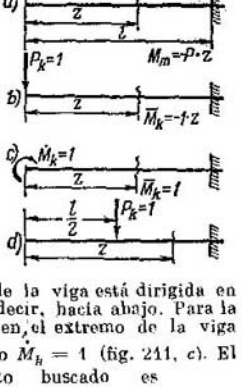


Fig. 211

la influencia de los momentos flectores sobre la flexión. Las ecuaciones de estos últimos son

$$M_m = -Pz; \qquad \overline{M}_k = -1z; \qquad s = z.$$

El desplazamiento buscado se determina sólo con una integral, dado que las ecuaciones compuestas más arriba son válidas a lo largo de toda la viga:

$$\Delta_{km} = \int_0^l (-z)\left(-\frac{Pz}{EJ}\right) dz = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

El signo positivo en Δ_{km} indica que la flexión de la viga está dirigida en la dirección de la acción de la fuerza $P_k = 1$, es decir, hacia abajo. Para la determinación del ángulo de giro de la sección en el extremo de la viga empleamos el estado auxiliar con el momento externo $\overline{M}_k = 1$ (fig. 211, *c*). El nuevo valor es $\overline{M}_k = 1$ El desplazamiento buscado es

$$\Delta_{km} = \int_0^l 1\left(-\frac{Pz}{EJ}\right) dz = -\frac{Pl^2}{2EJ}.$$

El signo negativo indica que el ángulo de giro está dirigido hacia el lado opuesto a $\overline{M}_k = 1$, o sea, en sentido contrario a las agujas del reloj.

Para la determinación de la flexión en el punto medio de la viga empleamos el estado auxiliar con la fuerza $P_k = 1$ aplicada en dicho punto (fig. 211, *d*). En este caso, es necesario diferenciar dos secciones, una a la izquierda del centro de la viga y la otra, a la derecha del mismo. En el estado auxiliar $\overline{M}_k$ es diferente de cero sólo en la segunda sección y, por eso, también aquí habrá sólo una zona de integración para $\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant l$. El desplazamiento buscado es

$$\Delta_{km} = \int_{l/2}^{l} -\left(z - \frac{l}{2}\right)\left(\frac{-Pz}{EJ}\right) dz = \frac{5}{48}\cdot\frac{Pl^3}{EJ}.$$

Ejemplo 19. Determinar el desplazamiento horizontal, debido al peso concentrado P, del extremo de una barra inclinada, con el otro extremo empotrado (fig. 212).

Empleamos el estado auxiliar con la fuerza horizontal $P_k = 1$.

Las fuerzas internas se determinan en ambos estados por una sóla expresión a todo lo largo de la viga:

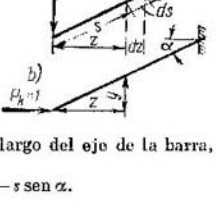
$$M_m = -Pz; \qquad \overline{M}_k = -1 \cdot y = -z \operatorname{tg} \alpha,$$

siendo $ds = \dfrac{dz}{\cos \alpha}$.

El desplazamiento es

$$\Delta_{km} = \int_0^l (-z \operatorname{tg} \alpha) \left(\frac{-Pz}{EJ} \right) \frac{dz}{\cos \alpha} = \frac{Pl^3}{3EJ} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Fig. 212



Si la sección se determina por la coordenada s a lo largo del eje de la barra, entonces,

$$M_m = -Ps \cos \alpha; \qquad \overline{M}_k = -1y = -s \operatorname{sen} \alpha.$$

El desplazamiento es

$$\Delta_{km} = \int_0^{l/\cos \alpha} (-s \operatorname{sen} \alpha) \frac{(-Ps \cos \alpha)}{EJ} ds = \frac{Pl^3}{3El} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

El signo positivo en ambos casos indica que el desplazamiento buscado Δ_{km} está dirigido hacia el lado de la acción de la fuerza $P_k = 1$, es decir, hacia la derecha.

Ejemplo 20. Determinar el desplazamiento del punto a (fig. 213) por las direcciones vertical y horizontal, si el apoyo izquierdo se desplaza hacia abajo en Δ. Al determinar el desplazamiento vertical empleamos el estado auxiliar con la fuerza vertical $P_k = 1$ (fig. 213, *b*). Las reacciones de apoyo son $\overline{A}_k = \overline{B}_k = 1/2$. Por la fórmula (11.40)

$$\Delta_{km} = -\left(-\frac{1}{2} \Delta \right) = \frac{\Delta}{2}.$$

El desplazamiento es positivo, por lo tanto, está dirigido hacia el lado de la acción de la fuerza $P_k = 1$, es decir, hacia abajo (fig. 213, *a*).

Al determinar el desplazamiento horizontal empleamos el estado auxiliar con la fuerza horizontal $P_k = 1$ (fig. 213, *c*). Las reacciones se muestran en la figura. El desplazamiento buscado es

$$\Delta_{km} = -\left(+\frac{h}{l} \Delta \right) = -\frac{h\Delta}{l}.$$

El signo menos indica que el desplazamiento horizontal del punto a está dirigido hacia el lado contrario a la fuerza $P_k = 1$, esto es, hacia la izquierda.

Ejemplo 21. Determinar el desplazamiento horizontal del extremo izquierdo de una barra quebrada, debido a un incremento de la temperatura en la parte *1-2* (fig. 214), siendo simétricas las secciones transversales de la parte calentada de la barra, con respecto al eje horizontal.

El estado auxiliar se expone en la fig. 214, *b*. Al determinar los desplazamientos térmicos es necesario calcular las fuerzas internas $\overline{N}_k$ y $\overline{M}_k$ originadas por la fuerza $P_k = 1$. Por cuanto en este ejemplo la variación de temperatura

ocurrió sólo en la parte *1-2*, entonces, las fuerzas internas $\overline{N}_k$ y $\overline{M}_k$ deben ser determinadas solamente en esta parte:

$$\overline{N}_k = -1; \qquad \overline{M}_k = -H.$$

Por la fórmula (11.40), teniendo en cuenta las (11.20) y (11.21), obtenemos que

$$\Delta_{kt} = \int_0^l -1\beta \frac{20° + 10°}{2}\, ds + \int_0^l -H\beta \frac{10° - 20°}{h}\, ds = -\beta 15° l + \beta \frac{H}{h} 10° l.$$

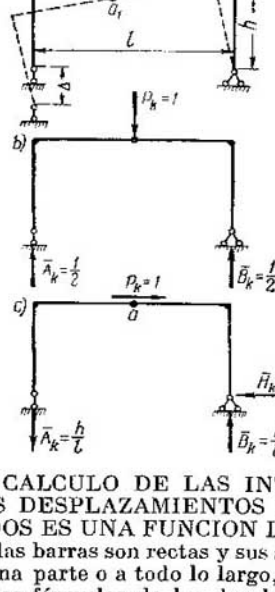


Fig. 213

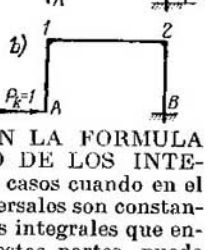


Fig. 214

§ 102. CALCULO DE LAS INTEGRALES EN LA FORMULA DE LOS DESPLAZAMIENTOS CUANDO UNO DE LOS INTEGRANDOS ES UNA FUNCION LINEAL. En los casos cuando en el sistema las barras son rectas y sus secciones transversales son constantes en una parte o a todo lo largo, el cálculo de las integrales que entran en las fórmulas de los desplazamientos, en estas partes, puede ser sustituido con la «multiplicación» de los diagramas de los integrandos. En estos casos, las fuerzas internas $\overline{N}_k$, $\overline{M}_k$ y $\overline{Q}_k$ del estado auxiliar, son funciones lineales por partes, esto es, sus diagramas, en sectores aislados, son rectilíneos y las características de las secciones pueden ser sacadas fuera del signo de la integral. Dentro de esta integral se conserva el producto de dos funciones, una de las cuales es lineal por partes.

Examinemos (fig. 215) el cálculo de la integral cuyo aspecto es

$$A = \int \overline{M}_k \frac{M_m}{EJ}\, ds = \frac{1}{EJ} \int \overline{M}_k M_m\, ds.$$

Esta integral, por su forma, coincide con la integral para la determinación de la magnitud A por la línea de influencia debida a una carga repartida. Por eso, empleando la analogía, nos imaginamos, convencionalmente, que M_m es la intensidad de la carga repartida y el diagrama de $\overline{M}_k$ es su línea de influencia. Sobre la parte recta de la l.i., como es sabido, toda la carga puede ser sustituida por la resultante, esto es, por el área ω_m del diagrama de M_m. A esta

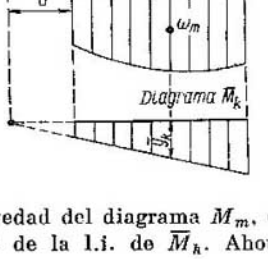


Fig. 215

resultante, aplicada en el centro de gravedad del diagrama M_m, es necesario multiplicarla por la ordenada de la l.i. de $\overline{M}_k$. Ahora podemos escribir la integral así:

$$\int \overline{M}_k \frac{M_m}{EJ} ds = \frac{\omega_m \overline{y}_k}{EJ}. \qquad (11.42)$$

La integral es igual al producto de la ordenada del diagrama lineal $\overline{M}_k$, tomada por debajo del centro de gravedad del diagrama M_m, por el área de este último.

El signo positivo del producto se obtiene cuando el diagrama M_m y la ordenada $\overline{y}_k$ son de un mismo signo, esto es, cuando ellos están colocados a un mismo lado de la barra.

El diagrama de M_m, por el principio de independencia de acción de las fuerzas, puede ser obtenido como la suma algebraica de los diagramas de diferentes cargas, la suma de las cuales es igual a la carga que produjo el diagrama dado. Al calcular la integral (11.42), esto permite representar el diagrama de M_m como compuesto por la suma o la diferencia cualesquiera de figuras simples.

En tales casos

$$\omega_m \overline{y}_k = \omega_{1m} \overline{y}_{1k} + \omega_{2m} \overline{y}_{2k} + \ldots + \omega_{nm} \overline{y}_{nk} = \sum \omega_{im} \overline{y}_{ik}. \qquad (11.43)$$

Por ejemplo, el diagrama representado en la fig. 216, puede ser representado como las figuras simples de sus componentes. Análogamente conviene proceder también en aquel caso, cuando el diagrama de M_m es binario y el área ω_m es igual a cero (fig. 217). En las figuras simples, el centro de gravedad se determina fácilmente. Si ambos diagramas, los de $\overline{M}_k$ y M_m son lineales, entonces, al «multiplicarlos» es indiferente de cuál de ellos tomar el área y de cuál

la ordenada. En calidad de ejemplo presentamos la «multiplicación» de dos trapecios (fig. 217, *b*) y obtenemos la fórmula que puede ser útil para los casos particulares de multiplicación de diagramas lineales:

$$\omega_m \bar{y}_k = \frac{al}{2}\left(\frac{1}{3}d+\frac{2}{3}c\right)+$$

$$+\frac{bl}{2}\left(\frac{1}{3}c+\frac{2}{3}d\right)=\frac{l}{6}[ad+bc+2(ac+bd)]. \qquad (11.44)$$

Si el diagrama M_m (fig. 218) representa una parábola de segundo orden, entonces, dividiéndola en sus partes componentes (fig. 218) podemos obtener la cómoda fórmula

$$\omega_m \bar{y}_k = M_m^{izq}\frac{l}{2}\left(\frac{2}{3}\bar{M}_k^{izq}+\frac{1}{3}\bar{M}_k^{der}\right)+M_m^{der}\frac{l}{2}\left(\frac{2}{3}\bar{M}_k^{der}+\frac{1}{3}\bar{M}_k^{izq}\right)+$$

$$+\frac{2l}{3}\left(M_m^{med}-\frac{M_m^{izq}+M_m^{der}}{2}\right)\bar{M}_k^{med}.$$

En definitiva, después de simplificar, tenemos

$$\omega_m \bar{y}_k = \frac{l}{6}\,(M_m^{izq}\bar{M}_k^{izq}+4M_m^{med}\bar{M}_k^{med}+M_m^{der}\bar{M}_k^{der}). \qquad (11.45)$$

Señalamos que la fórmula (11.44) también se puede llevar a tal forma.

Si la rigidez de la barra es variable, entonces, para calcular la integral por medio de la «multiplicación» de diagramas, es necesario

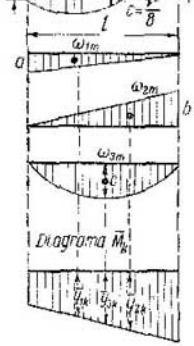


Fig. 216

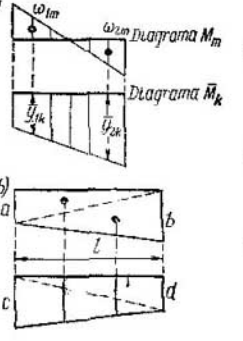


Fig. 217

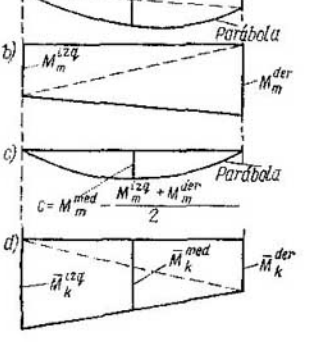


Fig. 218

reducir previamente el diagrama de M_m a una sola rigidez, multiplicando sus ordenadas por la relación $\frac{J_0}{J}$, donde J_0 es el momento de inercia de una de las secciones de la barra o un número arbitrario de dimensión de longitud al cuarto grado. Después de esto tendremos que

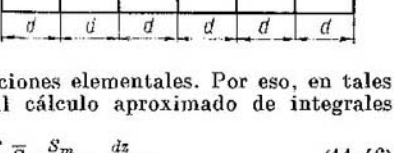
$$\int \overline{M}_k \frac{M_m}{EJ} ds = \frac{1}{EJ_0} \int \overline{M}_k \left(M_m \frac{J_0}{J} \right) ds = \frac{\omega_m^* \overline{y}_k}{EJ_0}, \qquad (11.42')$$

donde ω_m^* es el área del diagrama M_m reducido a una sóla rigidez.

§ 103. CALCULO APROXIMADO DE LAS INTEGRALES QUE COMPONEN LA FORMULA DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

La determinación de los desplazamientos de una viga curva (arco) es posible sólo por medio del cálculo directo de las integrales que componen la fórmula de los desplazamientos (11.38), las cuales en muchos casos, no son integrables, esto es, no pueden ser representadas

Fig. 219



en forma final a través de funciones elementales. Por eso, en tales casos, se tiene que recurrir al cálculo aproximado de integrales definidas del tipo:

$$\int \eta \, dz = \int \overline{S}_k \frac{S_m}{B} \cdot \frac{dz}{\cos \alpha}, \qquad (11.46)$$

donde

$$\cos \alpha = 1 : \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2};$$

y (z) es la ecuación de la viga curva (arco).

Para esto es necesario tener el valor de la función subintegral en varias secciones de la viga curva, dividiéndola en partes con iguales proyecciones sobre el eje z.

Si se admite, *aproximadamente*, que entre las secciones la función subintegral

$$\eta = \overline{S}_k \frac{S_m}{B \cos \alpha}$$

varía por el eje z en forma *lineal* (fig. 219), entonces, la integral (11.46) se calcula por la fórmula de los trapecios

$$\int_0^{l=nd} \eta \, dz = d \left(\frac{\eta_0}{2} + \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{n-1} + \frac{\eta_n}{2} \right). \qquad (11.47)$$

Pero si se considera, *aproximadamente*, que la función subintegral varía por la parábola cuadrangular en dos espacios adyacentes

por el eje z, entonces, cuando n es par, obtenemos la fórmula de Simpson:

$$\int_0^{l=nd} \eta\, dz = \frac{d}{3}[\eta_0 + 4(\eta_1 + \eta_3 + \ldots + \eta_{n-1}) + 2(\eta_2 + \eta_4 + \ldots + \eta_{n-2}) + \eta_n]. \quad (11.48)$$

Por cuanto la fórmula de Simpson, comúnmente, es más exacta que la de los trapecios, entonces, ésta es la que se debe usar.

El número de cálculos depende, ante todo, del número de partes adoptado. Cuanto mayor sea la cantidad de intervalos, evidentemente, tanto más exacto será el resultado. La principal dificultad radica en el cálculo de los valores de η de la función subintegral, ya que el empleo ulterior de la fórmula de Simpson se reduce a operaciones simples.

Si la función subintegral es *lisa por intervalos*, entonces lo expuesto más arriba es justo para cada sección.

Si la sección de longitud l está dividida sólo en dos intervalos, esto es, cuando $n=2$ y $d=\frac{l}{2}$, entonces, por (11.48) obtenemos

$$\int_0^l \eta\, dz = \frac{l}{6}(\eta_0 + 4\eta_1 + \eta_2). \quad (11.49)$$

Señalamos particularmente que si $\eta(z)$ es un polinomio hasta del tercer orden inclusiva, entonces, la fórmula (11.49) da una respuesta *exacta*. No es difícil ver que, en este caso, esta fórmula coincide con la fórmula (11.45).

§ 104. FORMA MATRIZ DE CALCULO DE LOS DESPLAZAMIENTOS. Para simplificar, escribimos la fórmula de los desplazamientos (11.38) sólo con un sumando, que tiene en cuenta la deformación por flexión:

$$\Delta_{km} = \sum \int \overline{M}_k \frac{M_m}{EJ}\, ds. \quad (11.50)$$

Examinemos una integral con la expresión subintegral continua sobre cierta i-ésima barra o porción de longitud d_i, el origen de la cual se designa con el índice $i-1$ y el final, con el i (fig. 220):

$$\Delta_{km}^i = \int_0^{d_i} \overline{M}_{ik} \frac{M_{im}}{E_i J_i}\, ds. \quad (11.51)$$

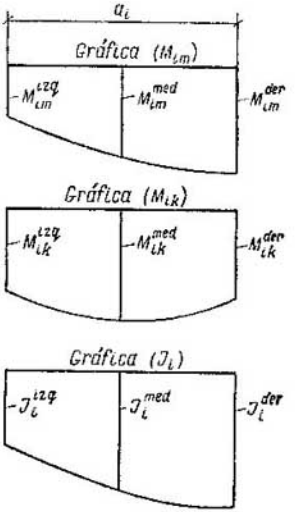
Su valor aproximado por la fórmula (11.49) será:

$$\Delta_{km}^i = \frac{d_i}{6EJ_0}[\overline{M}_{ik}^{izq} M_{im}^{izq} a_i^{izq} + 4\overline{M}_{ik}^{med} M_{im}^{med} a_i^{med} + \overline{M}_{ik}^{der} M_{im}^{der} a_i^{der}], \quad (11.52)$$

$$a_i = EJ_0 : E_i J_i; \qquad (11.53)$$

EJ_0 es la rigidez de cualquier sección del sistema tomada como básica.

Fig. 220



Recordamos que si en (11.51) $\overline{M}_{ik}$ es una función lineal y $\frac{M_{im}}{E_i J_i}$ una parábola de segundo orden (o lineal), (11.52) da el valor *exacto* de la integral.

Representamos la fórmula (11.52) en la forma matriz:

$$\Delta_{km}^{i} = \overline{\boldsymbol{M}}'_{ik} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{M}_{im}, \qquad (11.54)$$

donde

1) $$\overline{\boldsymbol{M}}'_{ik} = \| \overline{M}_{ik}^{izq} \overline{M}_{ik}^{med} \overline{M}_{ik}^{der} \| \qquad (11.55)$$

es la matriz línea de los momentos unitarios $\overline{M}_{ik}$ o, de otra manera, la columna transpuesta de la matriz de influencia de los momentos debidos a $P_k = 1$ sobre la i-ésima sección;

2) $$\boldsymbol{A}_i = \frac{d_i}{6EJ_0} \begin{Vmatrix} a_i^{izq} & 0 & 0 \\ 0 & 4a_i^{med} & 0 \\ 0 & 0 & a_i^{der} \end{Vmatrix} \qquad (11.56)$$

es la matriz de compresibilidad en la i-ésima sección

3) $$\boldsymbol{M}_{im} = \vec{\boldsymbol{M}}_{im} = \begin{Vmatrix} M_{im}^{izq} \\ M_{im}^{med} \\ M_{im}^{der} \end{Vmatrix} = | \{ M_{im}^{izq} M_{im}^{med} M_{im}^{der} \} | \qquad (11.57)$$

es la matriz de columna (vector) de los momentos M_{im} en la i-ésima sección, debidos a la carga dada.

En la fórmula (11.57) se señala la designación de la *matriz de columna* (del vector) en las tres formas empleadas.

Recordemos aquí que, en la matriz *resultante*, independientemente del número de matrices multiplicadas, la cantidad de líneas

será siempre como en *la primera* (izquierda) matriz y, la cantidad de columnas, como *en la última* (derecha) matriz.

El desplazamiento completo en el caso de n secciones será por (11.50),

$$\Delta_{hm} = \sum_{i=1}^{n} \Delta^{i}_{hm} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}'_{ih} A_i M_{im}. \tag{11.58}$$

Esta misma expresión en otra forma

$$\Delta_{hm} = \| \overline{M}'_{1h} \overline{M}'_{2k} \dots \overline{M}'_{nk} \| \, A \, | \{ M_{1m} M_{2m} \dots M_{nm} \} |, \tag{11.59}$$

donde

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & A_n \end{Vmatrix} \tag{11.60}$$

es la matriz cuasidiagonal de las matrices de compresibilidad de las barras o de sus secciones.

Si los diagramas $\overline{M}_{ik}$ y M_{im} son lineales, entonces:

$$\overline{M}^{\text{med}}_{ik} = (\overline{M}^{\text{izq}}_{ik} + \overline{M}^{\text{der}}_{ik}) : 2 \text{ y } M^{\text{med}}_{im} = (M^{\text{izq}}_{im} + M^{\text{der}}_{im}) : 2.$$

Colocando estas expresiones en (11.52), obtenemos

$$\Delta^{i}_{hm} = \frac{d_i}{6EJ_0} [\overline{M}^{\text{izq}}_{ik} M^{\text{izq}}_{im} (a^{\text{izq}}_i + a^{\text{med}}_i) + \overline{M}^{\text{izq}}_{ik} M^{\text{der}}_{im} a^{\text{med}}_i + + \overline{M}^{\text{der}}_{ik} M^{\text{izq}}_{im} a^{\text{med}}_i + \overline{M}^{\text{der}}_{ik} M^{\text{der}}_{im} (a^{\text{med}}_i + a^{\text{der}}_i)|. \tag{11.61}$$

En la forma matriz

$$\Delta^{i}_{hm} = \overline{M}'_{ik} A_i M_{im}, \tag{11.62}$$

donde

$$1) \quad M'_{ik} = \| \overline{M}^{\text{izq}}_{ik} \overline{M}^{\text{der}}_{ik} \|; \tag{11.63}$$

$$2) \quad A_i = \frac{d_i}{6EJ_0} \begin{Vmatrix} (a^{\text{izq}}_i + a^{\text{med}}_i) & a^{\text{med}}_i \\ a^{\text{med}}_i & (a^{\text{med}}_i + a^{\text{der}}_i) \end{Vmatrix}; \tag{11.64}$$

$$3) \quad M_{im} = \begin{Vmatrix} M^{\text{izq}}_{im} \\ M^{\text{der}}_{im} \end{Vmatrix} = | \{ M^{\text{izq}}_{im} M^{\text{der}}_{im} \} |. \tag{11.65}$$

Si, además, la sección en esta parte de la barra es constante, entonces $a^{\text{izq}}_i = a^{\text{med}}_i = a^{\text{der}}_i = a_i$ y la matriz A_i será:

$$A_i = \frac{d_i}{6EJ_0} \begin{Vmatrix} 2a_i & a_i \\ a_i & 2a_i \end{Vmatrix} = \frac{di}{6EJ_i} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}. \tag{11.66}$$

En aquellos casos cuando la rigidez de todas las barras es igual y constante, es necesario hacer $EJ_0 = EJ$ y, entonces, todas las $a_i = 1$.

El registro matriz de los sumandos en (11.38), que tienen en cuenta la deformación de los alargamientos y dislocaciones, se efectúa análogamente. Este puede ser obtenido del registro matriz del sumando, expuesto más arriba, que tiene en cuenta la deformación por flexión, por medio de las correspondientes sustituciones de símbolos:

$$\text{los } \overline{M}'_{ih}, \quad M_{im}J_0 \text{ y } a_i \text{ respectivamente por } \overline{N}'_{ih}, \quad N_{im}F_0 \text{ y } b_i = EF_0 : E_iF_i; \tag{11.67}$$

$$\text{los } \overline{M}'_{ih}, \quad M_{im}J_0 \text{ y } a_i \text{ respectivamente por } \overline{Q}'_{ih}, \quad Q_{im}F_0 \text{ y } c_i = \mu EF_0 : G_iF_i; \tag{11.68}$$

Si, como sucede frecuentemente, $\overline{N}_{ih}$, N_{im} y b_i ó $\overline{Q}_{ih}$, Q_{im} y c_i son constantes a lo largo de la barra o de su trozo, entonces las matrices (11.56), (11.64) — (11.66) serán

$$A_i = \frac{d_i b_i}{EF_0} \quad \text{ó} \quad A_i = \frac{d_i c_i}{EF_0}. \tag{11.69}$$

El primer sumando en la fórmula de los desplazamientos para las armaduras (11.39) es

$$\Delta_{hm} = \sum \overline{N}_{ih} \frac{N_{im}}{E_iF_i} l_i$$

en el registro matriz será

$$\Delta_{hm} = \overline{N}'_{ih} A N_{im}, \tag{11.70}$$

donde

$$1) \quad \overline{N}'_{ih} = \| \overline{N}_{1h} \overline{N}_{2h} \ldots \overline{N}_{nh} \| \tag{11.71}$$

es la matriz de línea de los esfuerzos unitarios $\overline{N}_{ih}$, o de otro modo, es la columna transpuesta de la matriz de influencia de los esfuerzos debidos a $P_h = 1$;

$$2) \quad A = \frac{1}{EF_0} \begin{Vmatrix} b_1 l_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 l_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n l_n \end{Vmatrix} \tag{11.72}$$

es la matriz de compresibilidad;

$$3) \quad N_{im} = | \{ N_{1m} N_{2m} \ldots N_{nm} \} | \tag{11.73}$$

es la matriz de columna (vector) de los esfuerzos N_{im}.

Ejemplo 22. Determinar la aproximación de los puntos a y b (fig. 221). La aproximación de los puntos a y b representa no un desplazamiento simple, sino generalizado. Por eso, en el estado auxiliar, bajo $P_h = 1$ es necesario entender un grupo de fuerzas, la fuerza generalizada del cual es igual a la uni-

dad. En este caso, el grupo de fuerzas está compuesto de dos fuerzas aplicadas en los puntos a y b por la dirección ab (fig. 221, c). Los diagramas de los estados real y auxiliar se muestran en el dibujo.

1. CALCULO DEL DESPLAZAMIENTO POR EL PROCEDIMIENTO CORRIENTE

Multiplicando los diagramas, obtenemos

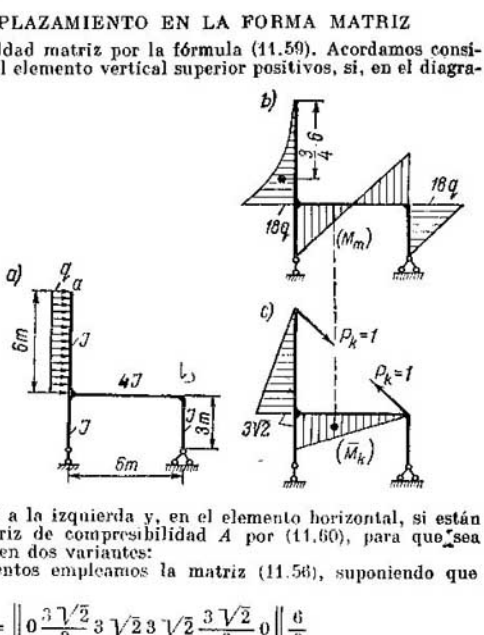
$$\Delta_{km} = (M_m)\cdot(\overline{M}_k) = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot 18q\,\frac{3}{4}\cdot 3\sqrt{2}\,\frac{1}{EJ} +$$

$$+\frac{3\sqrt{2}\cdot 6}{2}\,6q\,\frac{1}{E4J} = \frac{94{,}5\sqrt{2}}{EJ}\,q \text{ (en m)}.$$

2. CALCULO DEL DESPLAZAMIENTO EN LA FORMA MATRIZ

Componemos la igualdad matriz por la fórmula (11.59). Acordamos considerar a los momentos en el elemento vertical superior positivos, si, en el diagrama, éstos están colocados a la izquierda y, en el elemento horizontal, si están colocados abajo. La matriz de compresibilidad A por (11.60), para que sea práctica, la componemos en dos variantes:

Fig. 221



1) para ambos elementos empleamos la matriz (11.56), suponiendo que $EJ_0 = EJ$

$$EJ\Delta_{km} = \left\| 0\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\ 3\sqrt{2}\ 3\sqrt{2}\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\ 0 \right\| \begin{matrix} 6 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 \\ 4{,}5\,q \\ 18\,q \\ 18\,q \\ 0 \\ -18\,q \end{matrix} \right\|$$

Efectuamos el desarrollo sucesivo de la igualdad matriz:
a) de derecha a izquierda

$$EJ\Delta_{km} = \left\| 0\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\ 3\sqrt{2}\ 3\sqrt{2}\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\ 0 \right\| \cdot | \{0\ 18q\ 18q\ 4{,}5q\ -4{,}5q\} | =$$

$$= (0 + 27\sqrt{2} + 54\sqrt{2} + 13{,}5\sqrt{2} + 0 + 0)\, q = 94{,}5\sqrt{2}q;$$

b) de izquierda a derecha

$$EJ\Delta_{km} = \left\| 0\ 6\sqrt{2}\ 3\sqrt{2}\ \frac{3}{4}\sqrt{2}\ \frac{3}{2}\sqrt{2}\ 0 \right\| \cdot | \{0\ 4{,}5q\ 18q\ 18q\ 0\ -18q\} | =$$

$$= (0 + 27\sqrt{2} + 54\sqrt{2} + 13{,}5\sqrt{2} + 0 + 0)\, q = 94{,}5\sqrt{2}q.$$

El resultado coincide con el obtenido anteriormente;
2) para el elemento vertical empleamos la matriz (11.56) y, para la matriz horizontal, la (11.66):

$$EJ\Delta_{km} = \left\| 0\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\ 3\sqrt{2}\ 3\sqrt{2}\ 0 \right\| \frac{6}{6}$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 2/4 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 \\ 4{,}5q \\ 18q \\ 18q \\ -18q \end{matrix} \right\|.$$

Desarrollo sucesivo de la igualdad:
a) de derecha a izquierda

$$EJ\Delta_{km} = \left\| 0\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\ 3\sqrt{2}\ 3\sqrt{2}\ 0 \right\| \cdot | \{0\ 18q\ 18q\ 4{,}5q\ -4{,}5q\} | =$$

$$= (0 + 27\sqrt{2} + 54\sqrt{2} + 13{,}5\sqrt{2} + 0)\, q = 94{,}5\sqrt{2}q;$$

b) de izquierda a derecha

$$EJ\Delta_{km} = \left\| 0\ 6\sqrt{2}\ 3\sqrt{2}\ \frac{3}{2}\sqrt{2}\ \frac{3}{4}\sqrt{2} \right\| \cdot | \{0\ 4{,}5q\ 18q\ 18q\ -18q\} | =$$

$$= (0 + 27\sqrt{2} + 54\sqrt{2} + 27\sqrt{2} - 13{,}5\sqrt{2})\, q = 94{,}5\sqrt{2}q.$$

También en este caso, los resultados coinciden con los obtenidos anteriormente.

§ 105. DETERMINACION DE LOS DESPLAZAMIENTOS POR MEDIO DE LA ENERGIA POTENCIAL. La energía potencial de la deformación del sistema, expresada por medio del trabajo de las fuerzas externas, según (11.8) puede ser presentada en la forma

$$U = \frac{P_1\Delta_1}{2} + \frac{P_2\Delta_2}{2} + \ldots + \frac{P_k\Delta_k}{2} + \ldots + \frac{P_n\Delta_n}{2}.$$

Bajo fuerzas P_i y desplazamientos Δ_i se puede entender tanto fuerzas simples como generalizadas. Sobre la base del principio de independencia de acción de las fuerzas, los desplazamientos Δ_i

pueden ser descompuestos en sumandos:

$$\Delta_1 = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \ldots + \delta_{1k}P_k + \ldots + \delta_{1n}P_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_k = \delta_{k1}P_1 + \delta_{k2}P_2 + \ldots + \delta_{kk}P_k + \ldots + \delta_{kn}P_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_n = \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + \ldots + \delta_{nk}P_k + \ldots + \delta_{nn}P_n.$$

Componemos la derivada parcial de la energía potencial con relación a la fuerza P_k

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{1}{2}\left[P_1\frac{\partial \Delta_1}{\partial P_k} + P_2\frac{\partial \Delta_2}{\partial P_k} + \ldots + \Delta_k + P_k\frac{\partial \Delta_k}{\partial P_k} + \ldots + P_n\frac{\partial \Delta_n}{\partial P_k}\right].$$

Dado que $\frac{\partial \Delta_1}{\partial P_k} = \delta_{1k}$; $\frac{\partial \Delta_2}{\partial P_k} = \delta_{2k}$, ..., entonces,

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \Delta_k. \tag{11.74}$$

Por consiguiente, *la derivada parcial de la energía potencial de deformación con relación a la fuerza P_k es igual al desplazamiento en la dirección de esta fuerza (teorema de Castellano).*

Utilizamos la expresión de la energía potencial (11.12)

$$U = \sum\int \frac{N^2}{2EF}\,ds + \sum\int \frac{M^2}{2FJ}\,ds + \sum\int \mu\frac{Q^2}{2GF}\,ds. \tag{a}$$

Diferenciando, obtenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \Delta_k = \sum\int \frac{N}{EF}\cdot\frac{\partial N}{\partial P_k}\,ds + \sum\int \frac{M}{EJ}\cdot\frac{\partial M}{\partial P_k}\,ds + \sum\int \mu\frac{Q}{GF}\cdot\frac{\partial Q}{\partial P_k}\,ds. \tag{11.75}$$

Examinemos la aplicación de la fórmula (11.75) en un ejemplo. Esta fórmula permite determinar el desplazamiento por la dirección de la fuerza efectiva P_k. Pero la podemos extender también a la determinación de los desplazamientos en aquel lugar donde no hay fuerzas efectivas. Agregamos a las fuerzas efectivas la fuerza P_k por aquella dirección y en aquel lugar donde hay que determinar el desplazamiento. Entonces, la energía potencial y su derivada parcial dependerán de la fuerza introducida P_k. Pero dado que en la realidad no existe, entonces, en la expresión definitiva del desplazamiento es necesario hacer a esta fuerza igual a cero.

Al determinar el desplazamiento angular de la sección, se aplica el momento M_k y, a continuación, el orden de cálculo se conserva. La determinación de los desplazamientos por medio de la energía potencial es más complicada que por la fórmula general de los desplazamientos.

La derivada parcial de la energía potencial de deformación por el desplazamiento Δ_k es igual a la fuerza P_k, esto es, $\frac{\partial U}{\partial \Delta_k} = P_k$ (teorema de Lagrange).

Si tomamos la derivada parcial del trabajo complementario con relación a la fuerza, por ejemplo, respecto a la expresión (11.6), obtenemos el desplazamiento por la dirección de la fuerza (teorema

de Engesser)

$$\frac{\partial T'}{\partial P_k} = \Delta_k. \qquad (11.76)$$

Esta fórmula se emplea para calcular los desplazamientos en los sistemas que no siguen la ley de Hooke.

Ejemplo 23. Se exige determinar la inflexión del extremo de la consola

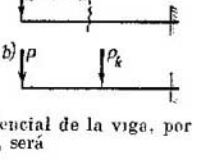


Fig. 222

(fig. 222). El momento flector $M = -Pz$. La energía potencial de la viga, por la expresión (a), sin tener en cuenta la fuerza transversal, será

$$U = \int_0^l \frac{P^2 z^2}{2EJ}\, dz = \frac{P^2 l^3}{6EJ}.$$

El desplazamiento buscado es

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Es más fácil determinarlo por la fórmula (11.75). Diferenciando la expresión del momento flector, obtenemos

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -z.$$

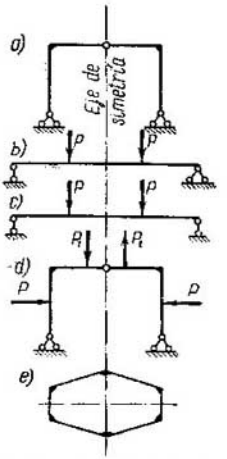
Colocando esto en (11.75) hallamos que

$$\Delta_k = \int_0^l \frac{-Pz}{EJ}(-z)\, dz = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

§ 106. UTILIZACION DE LA SIMETRIA DEL SISTEMA. El sistema se llama simétrico si, con una recta (con el eje de simetría), se puede dividirlo en dos partes iguales, cada una de las cuales representa la imagen especular de la otra (fig. 223, *a*). Junto a estos sistemas simétricos existen sistemas no del todo simétricos, que, con ciertas condiciones, pueden considerarse como tales. Así, por ejemplo, una viga (fig. 233, *b*) a pesar de que no es completamente simétrica, por cuanto a la izquierda tiene un apoyo rodante y a la derecha uno fijo, en el caso de carga vertical, ambas reacciones de los apoyos son verticales. Por eso, en el caso de carga vertical tal viga, convencionalmente, puede ser examinada como una viga con apoyos rodantes idénticos en ambos extremos, esto es, como simétrica. A los sistemas de este tipo, los llamaremos convencionalmente simétricos.

La noción de simetría se extiende también a las cargas, a los incrementos de temperatura y a las dislocaciones de los apoyos. La acción se considera simétrica si, en una de las mitades del sistema, representa la imagen especular de la acción sobre la otra mitad, como por ejemplo, las fuerzas P en la fig. 223, *c*. Si el efecto es simé-

Fig. 224



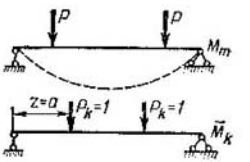
trico por su disposición, pero contrario por su dirección o signo, a ambos lados del eje de simetría, entonces, es llamado de simetría inversa (inversamente simétrico), como, por ejemplo, la fuerza P_1 en la fig. 223, *c*.

Los sistemas pueden ser simétricos no sólo con respecto a un eje, sino también a dos o más (fig. 223, *d*). En el caso de dos ejes de simetría, las acciones pueden ser: simétricas con respecto a dos ejes, simétricas con respecto a uno y de simetría inversa con respecto al otro e inversamente simétricas con respecto a los dos ejes.

La evidente propiedad de los sistemas simétricos consiste en que, en el caso de acción simétrica sobre el sistema, los desplazamientos y las fuerzas internas, por la dirección (y no por el signo) son *simétricos* y, en el caso de acción inversamente simétrica, éstos son de *simetría inversa*.

Esta propiedad se utiliza frecuentemente al determinar los desplazamientos. Así, por ejemplo, al calcular en la sección $z = a$ la inflexión de una viga debida a una carga simétrica (fig. 224), es necesario determinar la suma de dos flechas, una en el punto dado y la otra en su simétrico y, al resultado dividirlo por dos. Todo esto se puede obtener inmediatamente, si en el estado auxiliar se aplican en los puntos simétricos dos fuerzas $P_k = 1$ y si el cálculo de las integrales contenidas en la fórmula de los desplazamientos se

Fig. 223



realiza para una mitad del sistema. En esto consiste la simplificación de la determinación de los desplazamientos en los sistemas simétricos bajo cargas simétricas. Análogamente se deben determinar los desplazamientos de simetría inversa debidos a cargas inversamente simétricas. La simplificación puede ser utilizada cualesquiera que sean las acciones sobre un sistema simétrico si en él empleamos el

principio de independencia de acción de las fuerzas. Para esto la acción deberá ser descompuesta en dos componentes: simétrica y de simetría inversa. Así, por ejemplo, dos fuerzas ubicadas simétricamente P_1 y P_2 (fig. 225) se sustituyen por dos fuerzas simétricas X y dos de simetría inversa Y. En este caso es imprescindible que $X + Y = P_1$ y $X - Y = P_2$, de donde obtenemos que $X = \frac{P_1+P_2}{2}$ e $Y = \frac{P_1-P_2}{2}$.

La determinación de los desplazamientos debidos a las solicitaciones simétricas y de simetría inversa es necesario llevarla por separado, efectuando el cálculo sólo para la mitad del sistema.

De la propiedad de simetría del sistema se desprende una regla muy importante: *si al multiplicar los diagramas para la determinación*

Fig. 225

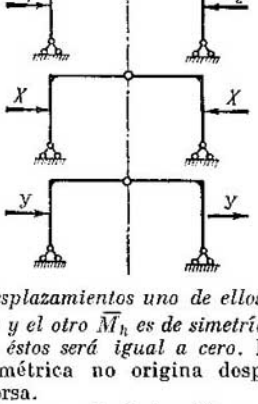
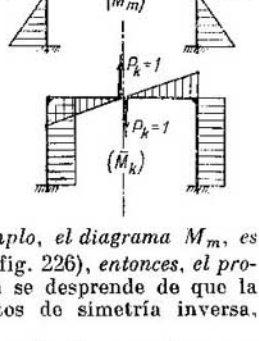


Fig. 226



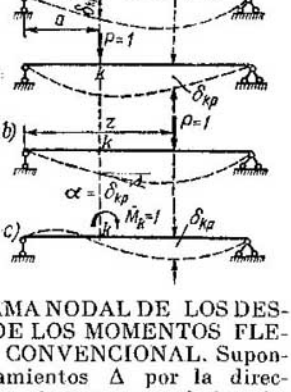
de los desplazamientos uno de ellos, por ejemplo, el diagrama M_m, es simétrico y el otro $\bar{M}_k$ es de simetría inversa (fig. 226), *entonces, el producto de éstos será igual a cero.* Esta regla se desprende de que la carga simétrica no origina desplazamientos de simetría inversa, y viceversa.

El diagrama simétrico M_m puede ser examinado como de cargas simétricas y, el de simetría inversa $\bar{M}_k$, como de fuerzas inversamente simétricas. Así, por ejemplo, al calcular las traslaciones recíprocas verticales de los extremos de las barras (fig. 226) bajo cargas simétricas tendremos diagramas simétricos y de simetría inversa. El producto de estos diagramas es igual a cero.

§ 107. LINEAS DE INFLUENCIA DE LOS DESPLAZAMIENTOS. Supongamos que en cierto sistema, por ejemplo, en una viga (fig. 227), se exige construir la línea de influencia del desplazamiento, en una sección cuya abscisa es $z = a$. El desplazamiento buscado, causado por la carga vertical $P = 1$ cuya posición se determina por la coordenada variable z, será δ_{kP} (fig. 227, *a*). Examinemos ahora el diagrama de los desplazamientos debidos a la fuerza $P = 1$ apli-

cada en el punto k y señalemos la flecha δ_{pk} en un punto arbitrario de coordenada z. Por el teorema de la reciprocidad de los desplazamientos unitarios $\delta_{pk} = \delta_{kp}$. El sentido de estos desplazamientos es diferente: δ_{kp} es el desplazamiento del punto fijado k producido por la carga móvil $P = 1$ y δ_{pk}, el desplazamiento del punto de aplicación de la carga rodante, debido a la fuerza fija $P_k = 1$ aplicada en el punto k. Análogamente, el examinar el ángulo de giro de la sección k, de los dos estados representados en la fig. 227, *b*, obtene-

Fig. 227



mos que $\alpha = \delta_{kp} = \delta_{pk}$. Por consiguiente, *la línea de influencia del movimiento de traslación de cualquier punto es el diagrama de los desplazamientos verticales debidos a la fuerza $P=1$ aplicada verticalmente en este punto y, la línea de influencia del ángulo de giro de una sección en cualquier punto es el diagrama de los desplazamientos causados por el momento $\bar{M} = 1$ aplicado en dicho punto.*

§ 108. CONSTRUCCION DEL DIAGRAMA NODAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS COMO DIAGRAMA DE LOS MOMENTOS FLECTORES DEBIDOS A UNA CARGA CONVENCIONAL. Supongamos que se conocen los desplazamientos Δ por la dirección dada, por ejemplo, la vertical, de ciertos puntos de los ejes de las barras, dispuestos sucesivamente en dirección perpendicular a los desplazamientos. Trazamos estos desplazamientos de las proyecciones de los puntos sobre una línea perpendicular a la dirección dada y unimos los puntos vecinos con segmentos de rectas (fig. 228, *a*, *b*). A tal diagrama poligonal cuyas ordenadas en los vértices determinan los desplazamientos de los puntos «nodales» examinados del sistema por la dirección dada, lo llamaremos *diagrama de desplazamientos nodales*. El está compuesto por las cuerdas del diagrama íntegro curvilíneo de los desplazamientos de todos los puntos axiales de las barras, dispuestos entre los puntos nodales vecinos tomados, como esto tiene lugar en las vigas, arcos y pórticos y coincide con los desplazamientos de todos los puntos de los ejes de ciertas barras de armaduras articuladas, si los puntos nodales se toman sobre los extremos de estas barras, cuyos ejes componen una línea continua.

Planteemos la tarea de construir el diagrama de los desplazamientos nodales Δ como diagrama de los momentos flectores en cierta viga *convencional* sin apoyos, dirigida perpendicularmente a la dirección de los desplazamientos que se determinan, debidos a las fuerzas nodales concentradas W_k denominadas *pesos elásticos*, a los momen-

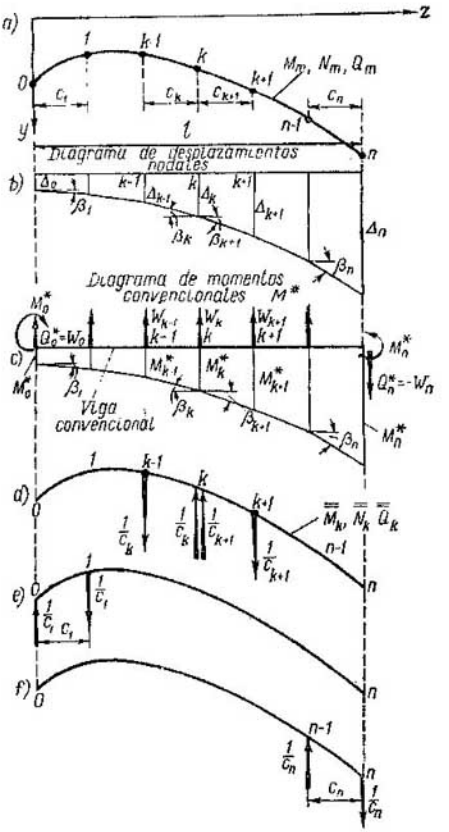


Fig. 228

tos convencionales externos M_0^* y M_n^* y a las fuerzas convencionales Q_0^* y Q_n^* sobre sus extremos, las direcciones positivas de los cuales se dan en la fig. 228, *c*. Por cuanto el diagrama de los momentos flectores convencionales M^* se puede construir por las fuerzas izquierdas o derechas, entonces, todas las fuerzas aplicadas a la viga convencional deberán componer un sistema autoequilibrado. Encontremos el valor de los pesos elásticos intermedios, empleando la conocida dependencia entre las fuerzas externas concentradas y los momentos flectores:

$$W_k = Q_{k+1}^* - Q_k^* = \operatorname{tg}\beta_{k+1} - \operatorname{tg}\beta_k. \qquad (a)$$

Por consiguiente, el peso elástico intermedio W_k es el incremento de las tangentes de los ángulos de inclinación de los segmentos adyacentes del diagrama de los momentos convencionales M^* o del diagrama de los desplazamientos nodales en el punto k.

Los momentos convencionales M_0^* y M_n^* y las fuerzas transversales Q_0^* y Q_n^* representan respectivamente los movimientos de traslación de los puntos extremos y las tangentes de los ángulos de giro de los segmentos extremos del diagrama de los desplazamientos nodales, esto es,

$$M_0^* = \Delta_0; \quad M_n^* = \Delta_n; \quad Q_0^* = W_0 = \operatorname{tg} \beta_1;$$
$$Q_n^* = -W_n = \operatorname{tg} \beta_n. \qquad \text{(b)}$$

Las expresiones (a) y (b) las escribimos en función de los movimientos de traslación:

$$W_k = \frac{M_{k+1}^* - M_k^*}{c_{k+1}} - \frac{M_k^* - M_{k-1}^*}{c_k} = \frac{\Delta_{k+1} - \Delta_k}{c_{k+1}} - \frac{\Delta_k - \Delta_{k-1}}{c_k};$$

$$Q_0^* = \frac{M_1^* - M_0^*}{c_1} = \frac{\Delta_1 - \Delta_0}{c_1}; \quad Q_n^* = \frac{M_n^* - M_{n-1}^*}{c_n} = \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{c_n}. \qquad \text{(c)}$$

Determinamos el peso elástico W_k como desplazamiento generalizado para cierto grupo de fuerzas, cuya fuerza generalizada es igual a la unidad. Componemos este grupo sobre la base de tales razonamientos.

Para la determinación del desplazamiento Δ_{k+1} en el punto $k+1$, es necesario, en el estado auxiliar, aplicar en este punto la fuerza $P = 1$, por la dirección del desplazamiento buscado Δ_{k+1} (en nuestro caso hacia abajo). Puesto que de acuerdo con (c) es imprescindible calcular la magnitud $\frac{\Delta_{k+1}}{c_{k+1}}$, aplicamos la fuerza $\frac{1}{c_{k+1}}$ directamente en el estado auxiliar (fig. 228, *d*). Razonando análogamente, obtenemos que en el punto k del sistema es necesario aplicar dos fuerzas orientadas hacia arriba, las $\frac{1}{c_{k+1}}$ y $\frac{1}{c_k}$ y, en el punto $k-1$ la fuerza $\frac{1}{c_k}$ dirigida hacia abajo. Si $\overline{\overline{M}}_k$, $\overline{\overline{N}}_k$ y $\overline{\overline{Q}}_k$ son las fuerzas internas del estado auxiliar debidas a este grupo de fuerzas y $\Delta d\varphi_m$, Δds_m, $\Delta\gamma_m^{\text{med}}$, Δds_{t_m} y $\Delta d\varphi_{t_m}$ las deformaciones del estado real determinadas por las fórmulas (11.18)—(11.23), entonces, las expresiones del peso elástico se pueden componer por la fórmula general de los desplazamientos en la forma siguiente:

$$W_k = \sum \int \overline{\overline{M}}_k (\Delta d\varphi_m + \Delta d\varphi_{t_m}) +$$
$$+ \sum \int \overline{\overline{N}}_k (\Delta ds_m + \Delta ds_{t_m}) + \sum \int \overline{\overline{Q}}_k \Delta\gamma_m^{\text{med}} ds. \qquad (11.77)$$

El peso elástico para una barra recta o con reducida curvatura, al determinar los desplazamientos causados por el carga originadora

de las fuerzas internas M_m, N_m y Q_m, se determina por la expresión

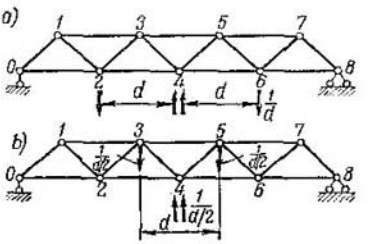
$$W_k = \sum \int \overline{\overline{M}}_k \frac{M_m}{EJ} ds + \sum \int \overline{\overline{N}}_k \frac{N_m}{EJ} ds + \sum \int \mu \overline{\overline{Q}}_k \frac{Q_m}{GF} ds. \quad (11.78)$$

Para las armaduras articuladas, con las mismas condiciones

$$W_k = \sum \overline{\overline{N}}_{ik} \frac{N_{im}}{E_i F_i} l_i. \quad (11.79)$$

Si en las armaduras articuladas se determinan los desplazamientos de los nudos del cordón inferior, los grupos de fuerzas se aplican sólo a los nudos de este cordón (fig. 229, *a*), pero si se determinan los

Fig. 229



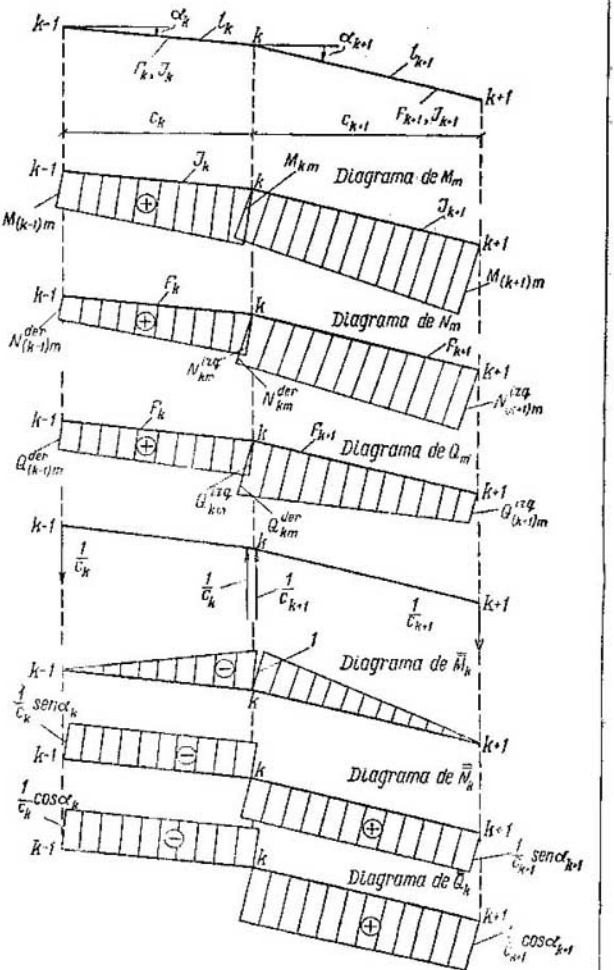
desplazamientos de ambos cordones, los grupos de fuerzas se aplicarán a los nudos del cordón superior y del inferior (fig. 229, *b*).

Si los pesos elásticos determinados por las expresiones (11.77—11.79) se calculan con precisión, entonces, en los lugares de su aplicación, los momentos flectores debidos a los mismos en la viga convencional serán iguales a los valores exactos de los desplazamientos. Por cuanto el grupo de fuerzas del estado para la auxiliar determinación de los pesos elásticos, es autoequilibrado, entonces, en los sistemas isostáticos, si este grupo está aplicado a una parte invariante, las fuerzas internas originadas por él son locales, esto es, son diferentes de cero sólo en la parte de acción de este grupo. En esto consiste, precisamente, la simplificación durante la construcción del diagrama de desplazamientos nodales por medio de los pesos elásticos en comparación con la determinación de cada uno por separado por la fórmula general.

De las cuatro condiciones extremas M_0^*, N_n^*, Q_0^* y Q_n^*, dos se calculan por las ecuaciones de equilibrio de la viga convencional y dos por las condiciones de fijación del sistema dado, sobre lo que se hablará más abajo. El grupo de fuerzas del estado auxiliar para la determinación de Q_0^*, se da en la fig. 228, *e* y, para la determinación de Q_n^*, en la fig. 228, *f*.

Empleando la expresión (11.78), componemos la fórmula general del peso elástico para la determinación de los desplazamientos en los nudos de una barra quebrada, parte de la cual se representa en la fig. 230. A las fuerzas sustituyentes (internas) en los nudos del

Fig. 230


k-1
k
k+1
Diagrama de M_m
Diagrama de N_m
Diagrama de Q_m
Diagrama de $\bar{M}_k$
Diagrama de $\bar{N}_k$
Diagrama de $\bar{Q}_k$

estado real, las anotaremos de la siguiente manera:

$$M_{(k-1)\,m},\quad M_{k\,m},\quad M_{(k+1)\,m};\qquad N_{(k-1)\,m},\quad N_{k\,m},\quad N_{(k+1)\,m};$$
$$Q_{(k-1)\,m},\quad Q_{k\,m},\quad Q_{(k+1)\,m}.$$

A sus diagramas entre los nudos los consideraremos rectilíneos. Los diagramas $\overline{M}_k$, $\overline{N}_k$ y $\overline{Q}_k$ del estado auxiliar se muestran en la fig. 230.

Multiplicando estos diagramas hallaremos el peso elástico W_k

$$W_k = -\frac{c_k}{6\cos\alpha_k EJ_k}(M_{(k-1)\,m} + 2M_{k\,m}) -$$
$$-\frac{c_{k+1}}{6\cos\alpha_{k+1}EJ_{k+1}}(2M_{k\,m} + M_{(k+1)\,m}) +$$
$$+\frac{N^{\text{der}}_{k\,m} + N^{\text{izq}}_{(k+1)\,m}}{2EF_{k+1}}\operatorname{tg}\alpha_{k+1} - \frac{N^{\text{izq}}_{k\,m} + N^{\text{der}}_{(k-1)\,m}}{2EF_k}\operatorname{tg}\alpha_k +$$
$$+\mu_{k+1}\frac{Q^{\text{der}}_{k\,m} + Q^{\text{izq}}_{(k+1)\,m}}{2GF_{k+1}} - \mu_k\frac{Q^{\text{izq}}_{k\,m} + Q^{\text{der}}_{(k-1)\,m}}{2GF_k}. \qquad (11.80)$$

Análogamente, empleando (11.77) podemos componer la fórmula general del peso elástico teniendo en cuenta la curvatura de la viga y la temperatura.

Señalamos que la fórmula (11.80) es empleable, sin reservas, sólo para el cálculo de los pesos intermedios $W_1, \ldots, W_{n-1}$ y sólo en aquel caso, cuando los grupos de fuerzas (fig. 230) están aplicados a la parte invariante de la barra.

Se puede emplear para el cálculo de los pesos elásticos extremos $W_0 = Q^*_0$ y $W_n = -Q^*_n$ si en el extremo dado de la barra hay empotramiento, que se considera como parte complementaria de la barra de rigidez infinita más allá de ella. Esto se explica con que en el empotramiento, las tangentes de los ángulos de giro del primero o último segmento del diagrama de los desplazamientos nodales son iguales en valor absoluto a sus incrementos en este lugar.

Si disminuimos ilimitadamente la longitud de los lados de la barra quebrada ($c_k = c_{k+1} = dz$), entonces, en el límite, obtenemos una barra curva y un número infinitamente grande de pesos elásticos concentrados, de los cuales, en adelante, se puede pasar a la carga nodal convencional repartida ininterrumpidamente.

Si en este caso las funciones $\frac{N\operatorname{tg}\alpha}{EF}$ y $\mu\frac{Q}{GF}$ son continuas, entonces, los pesos elásticos concentrados, según (11.80) son infinitesimales:

$$dW = -\frac{M_m\,dz}{EJ\cos\alpha} + d\left(\frac{N_m}{EF}\operatorname{tg}\alpha\right) + d\left(\mu\frac{Q_m}{GF}\right). \qquad (11.81)$$

El peso elástico infinitesimal dW es el incremento de la tangente del ángulo de inclinación de la tangente al diagrama de desplazamientos, esto es, $dW = d\left(\frac{d\Delta}{dz}\right)$. Dividiendo el peso infinitesimal dW por dz, obtenemos la intensidad de la carga convencional repartida

$$q^* = \frac{dW}{dz} = -\frac{M_m}{EJ\cos\alpha} + \frac{d}{dz}\left(\frac{N_m}{EF}\operatorname{tg}\alpha\right) + \frac{d}{dz}\left(\mu\,\frac{Q_m}{GF}\right). \quad (11.82)$$

Si las funciones $\frac{N\operatorname{tg}\alpha}{EF}$ y $\mu\frac{Q}{GF}$ son discontinuas, entonces, a los lugares de discontinuidad les corresponden los pesos convencionales concentrados de valor finito

$$\Delta W = \Delta\left(\frac{N_m}{EF}\operatorname{tg}\alpha\right) + \Delta\left(\mu\,\frac{Q_m}{GF}\right). \quad (11.83)$$

La dependencia entre la intensidad de la carga convencional, las fuerzas internas convencionales y los desplazamientos del estado real, puede ser representada de la siguiente manera:

$$\frac{d^2\Delta}{dz^2} = q^*; \qquad \frac{d\Delta}{dz} = Q^*; \qquad \Delta = M^*. \quad (11.84)$$

Mostremos que la expresión $\frac{d}{dz}\left(\frac{N_m}{EF}\operatorname{tg}\alpha + \mu\,\frac{Q_m}{GF}\right)$ en (11.82) se puede considerar como intensidad de la carga convencional, para la viga convencional, obtenida al sustituir en ésta la carga de momento convencional por la intensidad $m^* = \frac{N_m}{EF}\operatorname{tg}\alpha + \mu\,\frac{Q_m}{GF}$. Para esto examinemos dos elementos infinitesimales vecinos dz de

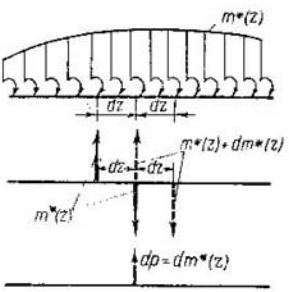


Fig. 231

la viga convencional con la carga de momento m^* (fig. 231). Sustituimos la carga de momento repartida en cada uno de estos elementos por los pares de fuerzas estáticamente equivalentes m^* con los brazos dz. En el límite entre estas partes tendremos que

$$dp = m^*(z) + dm^*(z) - m^*(z) = dm^*(z), \quad \text{de donde} \quad \frac{dp}{dz} = \frac{d}{dz}\,m^*(z).$$

Con tal sustitución, en los extremos y en los sitios de discontinuidad de la carga de momento m^* aparecen los pesos concentrados ΔW. De este modo, la carga convencional de intensidad q^* puede ser sustituida, a su vez, por dos cargas convencionales: la de fuerza, cuya intensidad es $q^{**} = -\frac{M}{EJ\cos\alpha}$ y la de momento, cuya intensidad es $m^* = \frac{N}{EF}\operatorname{tg}\alpha + \mu\,\frac{G}{GF}$, siendo

$$q^* = q^{**} + \frac{dm^*}{dz} \quad (11.85)$$

En forma más general, estas cargas convencionales pueden ser escritas así:

$$q^{**} = -\frac{\Delta\, d\varphi_m + \Delta\, d\varphi'_{t_m}}{dz}, \quad m^* = \frac{\Delta\, ds_m + \Delta\, ds'_{t_m}}{ds} \operatorname{tg}\alpha + \Delta\, d\gamma_m. \quad (11.86)$$

Para las cargas convencionales de fuerza y de momento, las dependencias diferenciales (11.84) adquieren la forma:

$$\frac{d^2\Delta}{dz^2} = q^{**} + \frac{dm^*}{dz}; \qquad \frac{d\Delta}{dz} = Q^* + m^*; \quad \Delta = M^*. \quad (11.87)$$

Señalamos que de las cargas convencionales de fuerza y de momento repartidas, por (11.82) y (11.86), se puede pasar a su vez, a las fuerzas y momentos concentrados, dividiendo las cargas repartidas en partes y sustituyéndolas por fuerzas y momentos *cualesquiera*, estáticamente equivalentes, debido a lo cual, los momentos flectores en las vigas convencionales, sobre los lindes de las partes, no varían.

Las condiciones extremas e intermedias de las vigas tomadas como convencionales se determinan por (11.84) y (11.87) en correspondencia con los tipos de las sujeciones de apoyo del sistema. Estas pueden ser expresadas por las reacciones de los apoyos de la viga convencional.

Analicemos algunas de éstas para la carga convencional q^*.

1. Apoyo extremo articulado capaz de obstaculizar el desplazamiento en una dirección determinada. El movimiento de traslación es igual a cero y el ángulo de inclinación de la tangente en el diagrama de los desplazamientos es distinto de cero. Esto significa que en este lugar de la viga convencional el momento $M^* = 0$ y la fuerza transversal $Q^* \neq 0$. En esta viga, con tal apoyo, sólo el valor extremo de las fuerzas internas es desconocido. La fuerza transversal desconocida puede ser considerada como la reacción del apoyo articulado en la viga convencional. Por lo tanto, en la viga convencional se deberá colocar un apoyo articulado en el mismo lugar en que éste se encuentra en el extremo del sistema dado.

2. Apoyo intermedio articulado capaz de obstaculizar el desplazamiento en una dirección determinada. El movimiento de traslación es igual a cero, pero es posible un punto de fractura en el diagrama de desplazamientos. Por eso, en la viga convencional, en este sitio el momento $M^* = 0$, y la fuerza transversal Q^* puede tener un incremento finito. Esto significa que en este lugar, la viga convencional deberá ser cargada con un peso concentrado convencional. Si el diagrama de desplazamientos se determina por la carga convencional repartida, entonces, el peso concentrado convencional W se calcula por (11.83).

Por consiguiente, la viga convencional, en este lugar, deberá tener un apoyo intermedio articulado cuya articulación superior la seccione. La reacción de tal apoyo es igual al peso convencional concentrado que deberá ser aplicado en este sitio.

3. Empotramiento. El movimiento de traslación en éste es nulo y el ángulo de inclinación del segmento en el diagrama de desplazamientos nodales es distinto de cero. El ángulo de inclinación de la tangente al diagrama de desplazamientos también será distinto de cero, si los desplazamientos se determinan por la carga repartida *tomando en cuenta los alargamientos y dislocaciones*. Por eso, en el caso general, en la viga convencional, en el lugar de empotramiento del sistema dado, el momento M^* es igual a cero y la fuerza transversal Q^* puede no serlo. Esta fuerza, en el empotramiento es igual al peso elástico W o a ΔW, que se determinan por (11.80) y (11.83) o por la condición de equilibrio de la viga convencional. De esta manera, con el empotramiento del sistema dado, uno de los valores extremos de las fuerzas internas en la viga convencional es incógnito y por lo tanto, al empotramiento en el sistema dado le corresponde en esta viga o un extremo libre, al cual está aplicado el peso elástico W o ΔW o un apoyo articulado, pero sin el peso elástico.

4. Extremo libre. El movimiento de traslación y el ángulo de inclinación del segmento o de la tangente en el diagrama de desplazamientos no son iguales a cero. En este lugar de la viga convencional deberán ser aplicados el momento M^* y la fuerza transversal Q^*, como en el caso de empotramiento en la viga convencional. De esta manera, en el lugar del extremo libre del sistema dado dos valores extremos de las fuerzas internas en la viga convencional serán incógnitos.

En la tabla 1 se exponen las diferentes fijaciones del sistema y las fijaciones correspondientes de las vigas convencionales.

Si el cálculo se efectúa con el empleo de las cargas repartidas de fuerza y de momento convencionales por (11.86), entonces, las condiciones extremas e intermedias para las vigas convencionales, en correspondencia con (11.87), sufren cierta variación. En el lugar del apoyo articulado intermedio y del empotramiento, en el extremo del sistema dado, en la viga convencional no actúan los pesos concentrados convencionales ΔW y, por consiguiente, en estos sitios, las reacciones de apoyo de la viga convencional que los sustituyen son iguales a cero.

En conclusión, escribimos la condición para los empotramientos en aquellos casos, cuando el diagrama de desplazamientos se determina por medio de la carga convencional repartida (11.82) teniendo en cuenta los alargamientos y dislocaciones.

En el empotramiento del extremo izquierdo siendo $z = 0$ (fig. 232)

$$\frac{d\Delta}{dz} = \frac{\Delta\, ds_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{dz} + \Delta\gamma_0 = \Delta W_0. \tag{11.88}$$

En el empotramiento del extremo derecho, para $z = l$

$$\frac{d\Delta}{dz} = \frac{\Delta\, ds_l \operatorname{sen} \alpha_l}{dz} + \Delta\gamma_l = -\Delta W_l. \tag{11.89}$$

Al determinar los desplazamientos debidos sólo a la carga en una barra recta o curva de reducida curvatura, estas mismas condiciones

Fig. 232

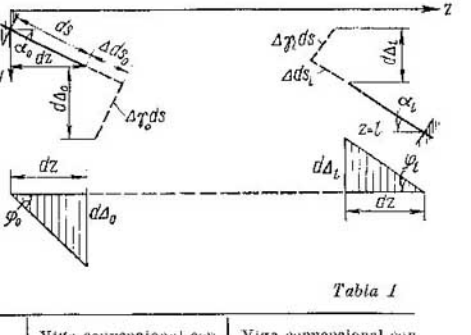
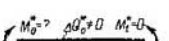
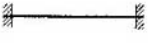
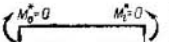
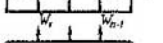
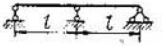
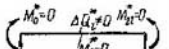
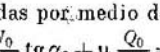
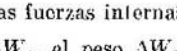
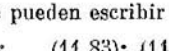


Tabla 1

Sistema dado	Viga convencional con condiciones extremas	Viga convencional con apoyos convencionales
		
		
		
		

expresadas por medio de las fuerzas internas, se pueden escribir así:
$\frac{d\Delta}{dz} = \frac{N_0}{EF} \operatorname{tg} \alpha_0 + \mu \frac{Q_0}{GF} = \Delta W_0$, el peso ΔW_0 por (11.83); (11.90)

$\frac{d\Delta}{dz} = \frac{N_l}{EF} \operatorname{tg} \alpha_l + \mu \frac{Q}{GF} = -\Delta W_n$, el peso ΔW_n por (11.83). (11.91)

Ejemplo 24. Determinar las flechas en los tres puntos *O*, *1* y *2* (fig. 233). Los pesos elásticos W_1 y W_2 por la fórmula (11.80) son:

$$W_1 = -\frac{l}{2 \cdot 6EJ}\left(2 \cdot 0 + \frac{Pl}{4}\right) = -\frac{Pl^2}{48EJ};$$

$$W_2 = -\frac{l}{2 \cdot 6EJ}\left(0 + 2\,\frac{Pl}{4}\right) - \frac{l}{2 \cdot 6EJ}\left(2\,\frac{Pl}{4} + 0\right) = -\frac{Pl^2}{12EJ}.$$

La viga convencional con pesos elásticos se representa en la fig. 233. La reacción del apoyo derecho es igual a $\frac{W_2}{2}$. La flecha bajo el peso *P* es:

$$y_2 = M_2^* = \frac{W_2 l}{4} = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

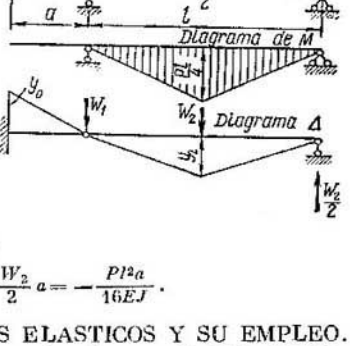


Fig. 233

La flecha en el extremo de la consola:

$$y_0 = M_0^* = -W_1 a - \frac{W_2}{2}\,a = -\frac{Pl^2 a}{16EJ}.$$

§ 109. MATRIZ DE LOS PESOS ELASTICOS Y SU EMPLEO. Examinemos la carga repartida convencional para la barra de reducida curvatura por (11.82), teniendo en cuenta **sólo** la deformación por flexión (fig. 228):

$$q_m^{**} = -M_m : EJ \cos\alpha. \qquad (11.92)$$

Para una mayor generalización, supongamos que la carga q_m^{**} posee discontinuidades (fig. 234, *a*) originadas por los saltos de los valores contenidos en la fórmula (11.92). Dividimos esta carga en partes y en el centro de gravedad de las áreas ω_{km} aplicamos las resultantes $V_{km} = \omega_{km}$ (fig. 234, *b*). Como resultado de tal sustitución los momentos flectores en la viga convencional, que determinan los desplazamientos de la barra en la dirección fijada, en los márgenes de las partes, esto es, en los puntos de división, no varían. Estas fuerzas V_{km}, a su vez, pueden ser sustituidas, según la ley de la palanca, por las componentes en los márgenes de las partes que dan la fuerza total W_{km} en el punto *k* (fig. 234, *c*), por lo que los momen-

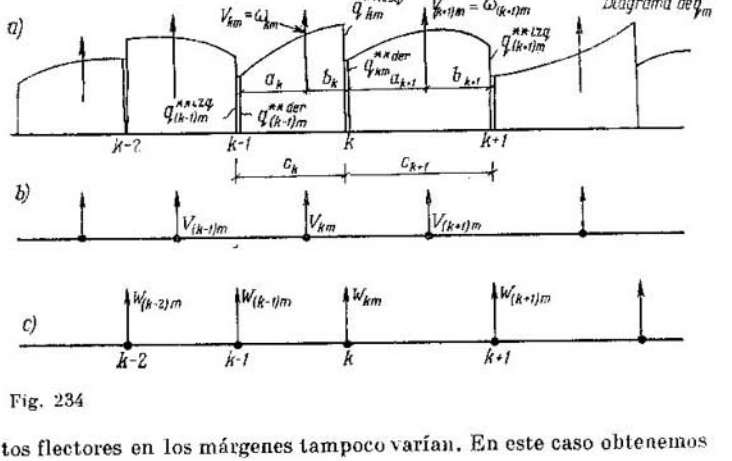


Fig. 234

tos flectores en los márgenes tampoco varían. En este caso obtenemos

$$W_{km} = V_{km}\frac{a_k}{c_k} + V_{(k+1)m}\frac{b_{k+1}}{c_{k+1}}. \qquad (11.93)$$

No es difícil establecer que V_{km} es el incremento de la tangente del ángulo de inclinación de la línea tangente al diagrama curvilíneo de desplazamientos en la parte c_k y que W_{km}, es el incremento de las tangentes de los ángulos de inclinación de las cuerdas del diagrama curvilíneo de desplazamientos en el punto k o, de otra manera, de las partes adyacentes del diagrama de desplazamientos nodales.

En relación con esto, señalamos que la reacción concentrada de la viga convencional debida a todas las V_{km} o W_{km} determina la tangente del ángulo de inclinación de la tangente en el punto dado, al diagrama curvilíneo de desplazamientos.

Prosiguiendo, multiplicamos la carga convencional q^{**} por EJ_0, donde J_0 es el momento de inercia de una de las secciones de la barra y designamos a

$$\bar{q}_m = q_m^{**}EJ_0 = -\frac{M_m J_0}{J\cos\alpha}. \qquad (11.94)$$

En estas condiciones

$$EJ_0 W_{km} = \omega_{km}^{*}\frac{a_k}{c_k} + \omega_{(k+1)m}^{*}\frac{b_{k+1}}{c_{k+1}}, \qquad (11.95)$$

donde ω_{km} y $\omega_{(k+1)\,m}$ son las superficies de carga convencional q_m sobre las partes k-ésima y $(k+1)$-ésima y, a_k y b_{k+1} son las distancias de los centros de gravedad de estos diagramas a los puntos k y $k+1$, respectivamente.

Si en cada parte se sustituye el diagrama no lineal $\bar{q}_{km}$ por uno aproximadamente lineal (fig. 235), entonces, por (11.95) se obtendrá:

1) pesos elásticos intermedios

$$EJ_0 W_{\substack{km \\ k=(1,\,2\ldots n-1)}} = \left(\bar{q}^{\,\text{der}}_{k-1} \cdot \frac{c_k}{2} \cdot \frac{1}{3} + \bar{q}^{\,\text{izq}}_{k} \frac{c_k}{2} \cdot \frac{2}{3} + \right.$$
$$\left. + \bar{q}^{\,\text{der}}_{k} \frac{c_{k+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} + \bar{q}^{\,\text{izq}}_{k+1} \frac{c_{k+1}}{2} \cdot \frac{1}{3}\right). \qquad (11.96)$$

Los presentamos de tal manera:

$$W_{\substack{km \\ [k=1,\,2\ldots(n-1)]}} = \frac{c_0}{6EJ_0}(\dot{q}^{\,\text{der}}_{k-1} + 2\dot{q}^{\,\text{izq}}_{k} + 2\dot{q}^{\,\text{der}}_{k} + \dot{q}^{\,\text{izq}}_{k+1}), \qquad (11.97)$$

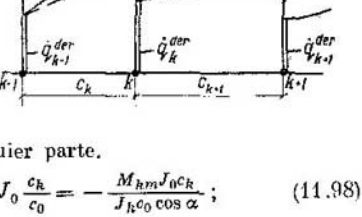


Fig. 235

donde c_0 es la longitud de cualquier parte.

$$\dot{q}_k = \bar{q}_{km} \frac{c_k}{c_0} = q^{**}_{km} EJ_0 \frac{c_k}{c_0} = -\frac{M_{km} J_0 c_k}{J_k c_0 \cos\alpha}; \qquad (11.98)$$

$$\dot{q}^{\,\text{der}}_{k-1} = -M^{\,\text{der}}_{(k-1)m} J_0 c_k : J^{\,\text{dor}}_{k-1} \cos\alpha^{\,\text{der}}_{k-1} c_0; \qquad (11.99)$$

$$\dot{q}^{\,\text{izq}}_{k} = -M^{\,\text{izq}}_{km} J_0 c_k : J^{\,\text{izq}}_{k} \cos\alpha^{\,\text{izq}}_{k} c_0; \qquad (11.100)$$

$$\dot{q}^{\,\text{der}}_{k} = -M^{\,\text{der}}_{km} J_0 c_{k+1} : J^{\,\text{der}}_{k} \cos\alpha^{\,\text{der}}_{k} c_0; \qquad (11.101)$$

$$\dot{q}^{\,\text{izq}}_{k+1} = -M^{\,\text{izq}}_{(k+1)m} J_0 c_{k+1} : J^{\,\text{izq}}_{k+1} \cos\alpha^{\,\text{izq}}_{k+1} c_0; \qquad (11.102)$$

2) pesos elásticos extremos, separados de Q^*_0 y Q^*_n (véase la fig. 228) son:
el izquierdo (nulo)

$$W_{0m} = \frac{c_0}{6EJ_0}(2\dot{q}^{\,\text{der}}_{0} + \dot{q}^{\,\text{izq}}_{1}); \qquad (11.103)$$

el derecho (último)

$$W_{nm} = \frac{c_0}{6EJ_0}(\dot{q}^{\,\text{der}}_{n-1} + 2\dot{q}^{\,\text{izq}}_{n}). \qquad (11.104)$$

Señalamos también que la fórmula (11.80) en la las mismas condiciones será un caso particular de la (11.97), si el diagrama M_m es continuo y si

$$\alpha^{\,\text{der}}_{k-1} = \alpha^{\,\text{izq}}_{k} = \alpha_k;\ J^{\,\text{der}}_{k-1} = J^{\,\text{izq}}_{k} = J_k;$$
$$\alpha^{\,\text{der}}_{k} = \alpha^{\,\text{izq}}_{k+1} = \alpha_{k+1} \text{ y } J^{\,\text{der}}_{k} = J^{\,\text{izq}}_{k+1} = J_{k+1}. \qquad (11.105)$$

Al vector de los pesos elásticos (extremos e intermedios) lo presentamos en los diferentes aspectos de la forma matriz:

$$W_m = W \cdot \vec{E} =$$

$$= \frac{c_0}{6EJ_0} \begin{Vmatrix} 2\dot{q}_0^{der} & \dot{q}_1^{izq} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dot{q}_1^{der} & 2\dot{q}_1^{izq} & 2\dot{q}_1^{der} & \dot{q}_2^{izq} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dot{q}_1^{der} & 2\dot{q}_2^{izq} & 2\dot{q}_2^{der} & \dot{q}_3^{izq} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{q}_{n-1}^{der} & 2\dot{q}_n^{izq} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{11.106}$$

Desprendiendo el vector $\dot{q}$ (matriz de columna), obtenemos

$$W_m = W_q \cdot \dot{q} = \frac{c_0}{6EJ_0} \begin{Vmatrix} 2\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,2\,2\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,2\,2\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,2\,2\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,2\,2\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,2\,2\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \dot{q}_0^{der} \\ \dot{q}_1^{izq} \\ \dot{q}_1^{der} \\ \dot{q}_2^{izq} \\ \dot{q}_2^{der} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{q}_{n-1}^{izq} \\ \dot{q}_{n-1}^{der} \\ \dot{q}_n^{izq} \end{Vmatrix}. \tag{11.107}$$

En aquellos casos cuando la carga $\dot{q}_k^{izq} = \dot{q}_k^{der}$, tendremos que

$$W_m = W_q \cdot \dot{q} = \frac{c_0}{6EJ_0} \begin{Vmatrix} 2\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,4\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,4\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,4\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,4\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{q}_{n-1} \\ \dot{q}_n \end{Vmatrix}. \tag{11.108}$$

Si en calidad de vector inicial se toma el vector de los momentos flectores M_m, entonces, en este caso, en lugar de (11.107) tendremos

$$W_m = W_{M_m} \cdot M_m = -\frac{c_0}{6EJ_0} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 2a_0^{der} & a_1^{izq} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0^{der} & 2a_1^{izq} & 2a_1^{der} & a_2^{izq} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{der} & 2a_2^{izq} & 2a_2^{der} & a_3^{izq} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & a_{n-2}^{der} & 2a_{n-1}^{izq} & 2a_{n-1}^{der} & a_n^{izq} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1}^{der} & 2a_n^{izq} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} M_{0m}^{der} \\ M_{1m}^{izq} \\ M_{1m}^{der} \\ M_{2m}^{izq} \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{(n-1)m}^{der} \\ M_{nm}^{izq} \end{Vmatrix}, \tag{11.109}$$

donde

$$a_{h-1}^{der} = c_h J_0 : J_{h-1}^{der} c_0 \cos \alpha_{h-1}^{der}; \tag{11.110}$$

$$a_h^{izq} = c_h J_0 : J_h^{izq} c_0 \cos \alpha_h^{izq}; \tag{11.111}$$

$$a_k^{der} = c_{k+1} J_0 : J_k^{der} c_0 \cos \alpha_k^{der}; \tag{11.112}$$

$$a_{h+1}^{izq} = c_{k+1} J_0 : J_{k+1}^{izq} c^0 \cos \alpha_{k+1}^{izq}. \tag{11.113}$$

Cuando los momentos M_m son continuos, entonces, siendo

$$c_k = c_{k+1} = c_0 = c; \ \alpha_i^{izq} = \alpha_i^{der} \text{ y } J_i^{izq} = J_i^{der}, \text{ de} \tag{11.109}$$

obtenemos que

$$W_m = W_{M_m} \cdot M_m =$$

$$= -\frac{c}{6EJ_0} \begin{Vmatrix} 2a_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & 4a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 4a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-2} & 4a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & 2a_n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} M_{0m} \\ M_{1m} \\ M_{2m} \\ \dots \\ \dots \\ M_{(n-1)m} \\ M_{nm} \end{Vmatrix}. \tag{11.114}$$

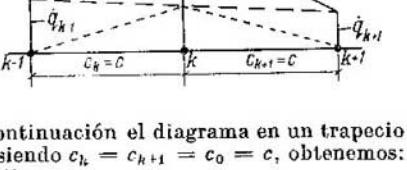
$$a_h = \frac{J_0}{J_h} : \cos \alpha_h.$$

Si, como sucede frecuentemente, en el caso de apoyo articulado de los extremos de la barra, $M_{0m} = 0$ y $q_0 = 0$ y no hay necesidad

de calcular el peso elástico W_{0m}, entonces, de las matrices (11.107)—(11.114) es necesario excluir la primera línea y la primera columna. Pero si $M_{nm} = 0$ y $q_n = 0$, entonces, para las mismas condiciones, es necesario excluir la última línea y la última columna.

En aquellos casos cuando el diagrama $\dot{q}$ es continuo, en dos paneles lindantes se puede sustituir *aproximadamente* por una parábola que pase por tres ordenadas vecinas en los márgenes de los pane-

Fig. 236



les (fig. 236). Dividiendo a continuación el diagrama en un trapecio y en un segmento parabólico, siendo $c_k = c_{k+1} = c_0 = c$, obtenemos:

1) para los pesos intermedios

$$EJ_0 W_{hm} = \frac{1}{3}\dot{q}_{k-1}\frac{c}{2} + \frac{1}{3}\dot{q}_{k+1}\frac{c}{2} + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\dot{q}_{k-1}+\dot{q}_{k+1}}{2}\cdot\frac{c}{2}\right)2 +$$

$$+\left[\frac{2}{3}\left(\dot{q}_k - \frac{\dot{q}_{k-1}+\dot{q}_{k+1}}{2}\right)c\,\frac{5}{8}\right]2.$$

Después de las transformaciones

$$W_{hm} = \frac{c}{12EJ_0}(\dot{q}_{k-1} + 10\dot{q}_k + \dot{q}_{k+1}); \qquad (11.115)$$

2) para los pesos elásticos de los extremos, desprendidos de Q_0^* y Q_n^* (véase la fig. 228):

a) para el izquierdo (nulo)

$$EJ_0 W_{0m} = \frac{2}{3}\dot{q}_0\frac{c}{2} + \cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\dot{q}_0+\dot{q}_2}{2}\cdot\frac{c}{2} + \frac{2}{3}\left(\dot{q}_1 - \frac{\dot{q}_0+\dot{q}_2}{2}\right)c\,\frac{3}{8}$$

o bien

$$W_{0m} = \frac{c}{12EJ_0}(3{,}5\dot{q}_0 + 3\dot{q}_1 - 0{,}5\dot{q}_2); \qquad (11.116)$$

b) para el derecho (último)

$$W_{nm} = \frac{c}{12EJ_0}(-0{,}5\dot{q}_{n-2} + 3\dot{q}_{n-1} + 3{,}5\dot{q}_n). \qquad (11.117)$$

En este caso, la forma matriz del vector de los pesos elásticos

será

$$W_m = W_{M_m} \cdot M_m =$$

$$= -\frac{c}{12EJ_0} \begin{Vmatrix} 3{,}5a_0 & 3a_1 & -0{,}5a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & 10a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 10a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1a_{n-2} & 10a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5a_{n-2} & 3a_{n-1} & 3{,}5a_n \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} M_{0m} \\ M_{1m} \\ M_{2m} \\ \cdots \\ M_{(n-1)m} \\ M_{nm} \end{Vmatrix}. \qquad (11.118)$$

Las matrices transformadoras del vector de carga $\dot{q}$ o del vector de momentos M_m en el vector de los pesos elásticos W_m se llaman **matrices de pesos elásticos.**

El registro matriz de los desplazamientos Δ por medio de los pesos elásticos tiene la forma

$$\Delta = B \cdot W_{\dot{q}} \cdot \dot{q} \qquad (11.119)$$

ó

$$\Delta = B \cdot W_{M_m} \cdot M_m. \qquad (11.120)$$

Aquí, B es la matriz de influencia de los momentos flectores en la viga convencional.

Ejemplo 25. Determinar los desplazamientos verticales de los puntos nodales de una barra quebrada (fig. 237, *a*) y el ángulo de giro del extremo libre por medio de los pesos elásticos en la forma matriz.

El diagrama de los momentos flectores se da en la figura 237, *b* y el diagrama de $\bar{q}$ para $J_0 = J$, en la fig. 237, *c*, donde se representa la viga convencional.

La igualdad matriz para la determinación de los desplazamientos verticales la escribimos por (11.119)

$$\Delta = B \cdot W_{\dot{q}} \cdot \dot{q}. \qquad (a)$$

Componemos la matriz de influencia de los momentos flectores en la viga convencional, empleando los diagramas debidos a las fuerzas unitarias por la dirección de W_0, W_1 y W_2 (fig. 238):

$$B = \begin{Vmatrix} \overline{M}_{00} \overline{M}_{01} \overline{M}_{02} \\ \overline{M}_{10} \overline{M}_{11} \overline{M}_{12} \\ \overline{M}_{20} \overline{M}_{21} \overline{M}_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & l\cos\alpha & 2l\cos\alpha \\ 0 & 0 & l\cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = l\cos\alpha \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

La matriz de los pesos elásticos la escribimos por (11.107)

$$W_q = \frac{l\cos\alpha}{6EJ}\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

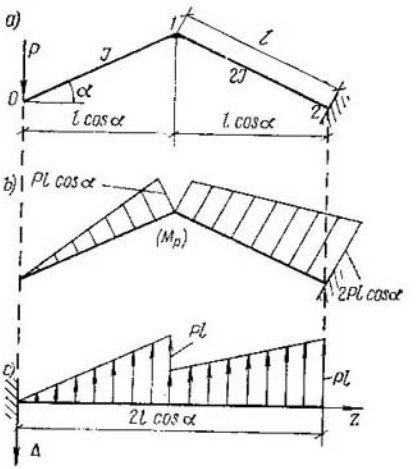


Fig. 237

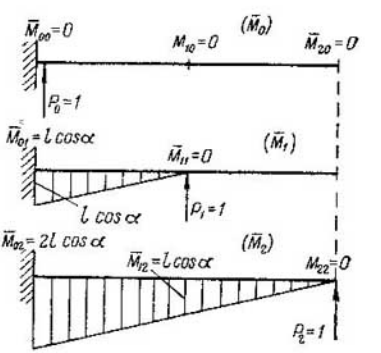


Fig. 238

El vector (la matriz de columna) $\dot{q}$ es

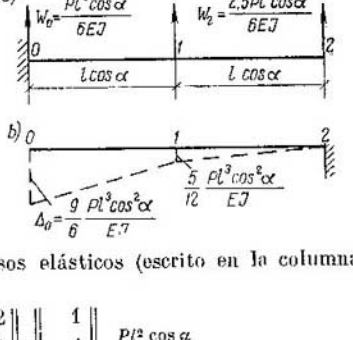
$$\dot{q} = \left| \left\{ 0 \;\; Pl \;\; P\frac{l}{2} \;\; Pl \right\} \right|.$$

Ahora (a) será:

$$\Delta = l\cos\alpha \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \frac{l\cos\alpha}{6EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ Pl \\ P\frac{l}{2} \\ Pl \end{Vmatrix}. \qquad \text{(b)}$$

Desarrollamos sucesivamente esta igualdad. Al principio multiplicamos la matriz de pesos elásticos W_q por el vector de carga q,

Fig. 239



obtenemos el vector de los pesos elásticos (escrito en la columna derecha) (fig. 239, *a*):

$$\Delta = l\cos\alpha \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \\ 2{,}5 \end{Vmatrix} \cdot \frac{Pl^2\cos\alpha}{6EJ}.$$

Efectuamos la última multiplicación de la matriz de influencia B por el vector W de los pesos elásticos, obtenemos el vector de los desplazamientos de los nudos de la barra:

$$\Delta = \frac{Pl^3\cos^2\alpha}{EJ} \left| \begin{Bmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 12 \end{Bmatrix} 0 \right|.$$

El ángulo de giro del extremo de la barra es igual a la fuerza transversal en el empotramiento de la viga convencional, es decir, a la suma de todos los pesos elásticos:

$$\varphi = (1+4+2{,}5)\frac{Pl^2\cos\alpha}{6EJ} = \frac{5}{4}\cdot\frac{Pl^2\cos\alpha}{EJ}.$$

En todos los casos de este ejemplo nosotros obtuvimos los valores exactos de los desplazamientos buscados. Esto sucedió porque el diagrama $\bar{q}$ es lineal y, entonces, las fórmulas (11.107)—(11.114) resultan exactas.

§ 110. NOCION SOBRE LA DETERMINACION DE LOS DESPLAZAMIENTOS EN LA FASE ELASTICOPLASTICA. La determinación de los desplazamientos de los sistemas que trabajan en la

fase elasticoplástica, es mucho más complicada que en el caso de su trabajo elástico. La complejidad surge, ante todo, debido a que el núcleo elástico a lo largo de la barra, hablando en general, es variable. Por eso, para simplificar, nos limitaremos a examinar sólo los sistemas que trabajan a la flexión simple, las secciones transversales de cuyas barras son rectangulares. Para la deducción de la fórmula de los desplazamientos, examinemos una viga que trabaja en la fase elasticoplástica (fig. 240). En calidad de desplazamientos posibles para el estado auxiliar con la fuerza $P_k=1$, adoptamos el diagrama de los desplazamientos del estado real examinado. Empleando la hipótesis de las secciones planas, escribimos el trabajo de las

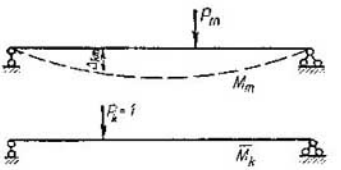


Fig. 240

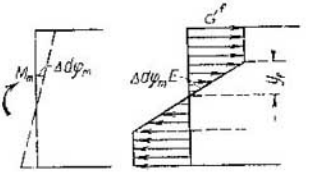


Fig. 241

fuerzas externas e internas del estado auxiliar en los desplazamientos del real

$$1 \cdot \Delta_{km} = \sum \int \overline{M}_k \cdot \Delta d\varphi_m.$$

Para las secciones que trabajan en la fase elástica

$$\Delta d\varphi_m = \frac{M_m\, ds}{EJ}.$$

Para las que trabajan en la fase elasticoplástica (fig. 241)

$$\Delta \cdot d\varphi_m = \frac{\sigma^t\, ds}{E y_t}.$$

De aquí se deduce la fórmula de los desplazamientos

$$\Delta_{km} = \sum_{\text{elást.}} \int \overline{M}_k \frac{M_m}{EJ} ds + \sum_{\text{elasticoplást.}} \int \overline{M}_k \frac{\sigma^t\, ds}{E y_t}. \qquad (11.121)$$

Hallemos la magnitud y_t para la sección rectangular (fig. 241)

$$M_m = \frac{b(2y_t)^2}{6}\sigma^t + \sigma^t b\left(\frac{h}{2} - y_t\right)\left(\frac{\frac{h}{2}+y_t}{2}\right)2,$$

de donde obtenemos que

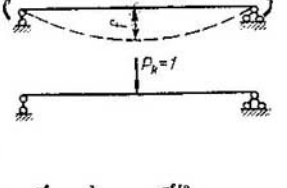
$$y_t = \frac{h}{2}\sqrt{3\left(1 - \frac{M_m}{M_{\text{lím}}}\right)}, \qquad (11.122)$$

donde $M_{\text{lím}} = \frac{bh^2}{4}\sigma^t$.

Ejemplo 26. Determinar la flecha en el punto medio de una viga en el caso de flexión simple, en la fase elasticoplástica (fig. 242), si $M_m = 0{,}88M_{lfm}$.

Aquí, la magnitud y_t es constante: $y_t = \frac{h}{2}\sqrt{3(1-0{,}88)} = 0{,}3h$.

Fig. 242



Por la fórmula (11.121), obtenemos que

$$f = \Delta_{km} = 2\int_0^{l/2} \overline{M}_k \frac{\sigma^t}{E} \cdot \frac{dz}{y_t} = 2\int_0^{l/2} \frac{1}{2} z \frac{\sigma^t}{E} \cdot \frac{dz}{0{,}3h} = \frac{\sigma^t l^2}{2{,}4Eh}.$$

Si tomamos M igual al momento límite en la fase elástica, entonces

$$f = \frac{Ml^2}{8EJ} = \frac{Ml^2}{8EW\frac{h}{2}} = \frac{\sigma^t l^2}{4Eh}.$$

CAPITULO XII * FORMACION Y CALCULO DE LOS SISTEMAS ESPACIALES

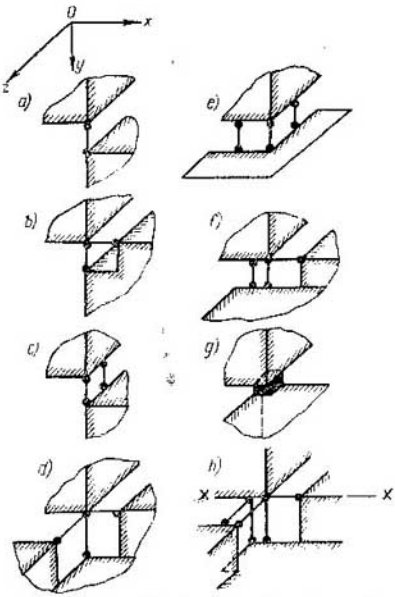
§ 111. VINCULOS, UNIONES SIMPLES Y FIJACIONES DE LOS SISTEMAS A TIERRA. Los sistemas espaciales, a semejanza de los planos, en la mayoría de los casos son invariantes, por cuanto ellos, como norma, soportan diferentes tipos de carga. Todos los razonamientos sobre el comportamiento de los sistemas variantes y de variabilidad instantánea, para diferentes cargas, así como las consideraciones sobre su empleo, expuestas para los sistemas planos, en principio, son válidos también para los espaciales. A cualquier sistema espacial invariante lo llamaremos cuerpo. Todo cuerpo libre con respecto a otro, posee seis grados de libertad, o sea, puede realizar tres movimientos de traslación y tres rotaciones. La unión de cuerpos aislados en uno invariante, se efectúa por medio de vínculos. Cada vínculo posee características cinemática y estática. Las características cinemáticas de los vínculos se examinarán en el caso de desplazamientos infinitesimales.

Para los sistemas espaciales se distinguen los siguientes tipos de vínculos.

1. Barra con articulación esférica por los extremos, que permite rotaciones en cualquier dirección (vínculo de rótula planorrodante — fig. 243, *a*).

Característica cinemática: el vínculo elimina el desplazamiento progresivo del cuerpo unido a lo largo de la barra (por el eje y), esto es, destruye un grado de libertad, pero le permite movimiento de traslación en el plano perpendicular a la barra (dos grados de libertad) y rotaciones alrededor de tres ejes que pasan, por ejemplo,

Fig. 243



a través de la articulación esférica (tres grados de libertad).

Característica estática: en el vínculo puede surgir una fuerza reactiva a lo largo de la barra.

La barra con articulaciones esféricas por los extremos es el tipo básico elemental de vínculo de los sistemas espaciales. Los vínculos de otros tipos son, comúnmente, combinaciones diferentes de varias de tales barras.

2. Dos barras con una articulación esférica común en uno de sus extremos (vínculo de rótula linealrrodante — fig. 243, *b*).

Característica cinemática: el vínculo elimina los desplazamientos progresivos en el plano de dos barras (en el plano xOy), es decir, destruye dos grados de libertad, pero le permite al cuerpo unido movimiento de traslación por la recta perpendicular al plano de las dos barras (por el eje z — un grado de libertad) y rotación alrededor de tres ejes, que pasan, por ejemplo, a través de la articulación común (tres grados de libertad).

Característica estática: en el vínculo puede surgir una fuerza reactiva, situada en el plano de las barras y que pasa por la articulación común, la cual puede ser descompuesta en dos componentes.

3. *Dos barras paralelas* (vínculo planorrodante con dos rotaciones — fig. 243, *c*).

Característica cinemática: el vínculo elimina el desplazamiento progresivo del cuerpo unido a lo largo de las barras (por el eje y) y el giro en su plano (en el plano yOz), esto es, destruye dos grados de libertad, pero le permite movimiento de traslación por la direc-

ción perpendicular a las barras (en el plano xOz — dos grados de libertad) y dos rotaciones alrededor de los ejes vertical y horizontal que, por ejemplo, pasan por dos articulaciones (alrededor de los ejes y y z — dos grados de libertad).

Característica estática: en el vínculo pueden surgir a lo largo de las barras dos fuerzas reactivas, las cuales pueden ser reducidas a una fuerza que actúa paralelamente a las barras y a un par en el plano de las barras.

4. Tres barras no pertenecientes a un mismo plano con una articulación esférica común en uno de sus extremos (vínculo de rótula fijo o rótula — fig. 243, *d*).

Característica cinemática: el vínculo elimina los tres desplazamientos progresivos del cuerpo unido, es decir, destruye tres grados de libertad, pero permite rotación alrededor de tres ejes que pasan por la articulación común (tres grados de libertad).

Característica estática: en el vínculo puede surgir una fuerza reactiva que pasa por la articulación común y que puede ser descompuesta en tres componentes.

5. Tres barras paralelas no dispuestas en el mismo plano (vínculo rodante con una rotación, fig. 243, *e*).

Característica cinemática: el vínculo elimina el desplazamiento progresivo del cuerpo unido a lo largo de las barras (por el eje y) y dos rotaciones alrededor de los ejes x y z, o sea, destruye tres grados de libertad, pero permite movimiento de traslación en el plano perpendicular a las barras (en el plano xOz, dos grados de libertad) y rotación alrededor del eje paralelo a las barras (paralelo al eje y, un grado de libertad).

Característica estática: en el vínculo pueden surgir tres fuerzas reactivas en la dirección de tres barras, las cuales pueden ser reducidas a una fuerza que actúa, por ejemplo, a lo largo de la barra angular y a dos pares en los planos xOy y zOy.

6. Tres barras en un mismo plano, de las cuales dos son paralelas y la tercera tiene una rótula común con una de ellas (vínculo linealrrodante con dos rotaciones, fig. 243, *f*).

Característica cinemática: el vínculo elimina los desplazamientos progresivos y la rotación del cuerpo unido en el plano de las barras (en el plano xOy), esto es, elimina tres grados de libertad, pero permite movimiento de traslación por la recta perpendicular al plano de las barras (un grado de libertad) y dos rotaciones, por ejemplo, alrededor de los ejes x e y (dos grados de libertad).

Característica estática: en los vínculos pueden surgir fuerzas reactivas a lo largo de las barras, las cuales pueden ser reducidas a una fuerza y a un par en el plano de las barras.

7. Soldadura (vínculo fijo sin rotaciones, fig. 243, *g*).

Característica cinemática: el vínculo elimina todos los desplazamientos del cuerpo unido, es decir, elimina sus seis grados de libertad.

Característica estática: en el vínculo pueden surgir tres fuerzas reactivas por la dirección de los ejes de coordenadas y tres momentos reactivos en los planos coordenados.

La soldadura es equivalente a seis barras.

Además de los vínculos simples examinados, son posibles también vínculos más complejos obtenidos de los simples, con la agregación de barras. Así, por ejemplo, si al vínculo representado en la fig. 243, *d*, le agregamos dos barras capaces de obstaculizar las rotaciones alrededor de dos ejes, obtenemos la así llamada articulación cilíndrica, que sólo permite rotación alrededor del eje x, que pasa por las rótulas en los extremos de cinco barras (fig. 243, *h*).

Si la soldadura o la rótula enlaza a varios cuerpos simultáneamente, entonces, éstas son vínculos múltiples. Su multiplicidad es igual al número de cuerpos unidos por aquéllas, menos uno.

Examinemos algunas uniones invariantes de dos cuerpos. Como ya se dijo, para la formación de una unión invariante de dos cuerpos es necesario destruir seis grados de libertad de un cuerpo con respecto a otro. Esto puede hacerse por medio de distintos vínculos examinados y no examinados aquí. Por cuanto, sin embargo, los diferentes vínculos representan combinaciones de barras, entonces, para la generalización de los razonamientos, es cómodo considerar también a las uniones de los cuerpos en el caso general, como uniones formadas por medio de barras. Los seis grados de libertad de un cuerpo con respecto a otro pueden ser destruidos con no menos de seis barras. Pero éstas deberán estar correctamente ubicadas. En caso contrario, habrá variabilidad en la unión. Los casos exclusivos de unión de dos cuerpos por medio de seis barras que producen variabilidad instantánea o variabilidad con desplazamientos finitos, son los siguientes.

1. Seis barras intersecan una recta (fig. 244, *a*). Esta recta será el eje de la rotación infinitesimal o finita de un cuerpo con respecto a otro. Aquí pueden haber los siguientes casos particulares.

En un mismo plano están ubicadas cuatro barras. En este caso, dos barras cruzarán el plano en el cual están las otras cuatro barras en dos puntos, por los cuales pasa la recta intersecada por todas las seis barras (fig. 244, *b*).

Las barras están ubicadas en dos planos. La recta de intersección de los planos se corta por todas las barras (fig. 244, *c*).

Las barras están ubicadas en planos paralelos. Estos se cortan en el infinito por una misma recta a la que cruzan todas las barras (fig. 244, *d*).

Las barras se cortan de a tres en dos puntos. Por estos puntos pasa la recta intersecada por las seis barras (fig. 244, *d*).

2. Más de tres barras se cortan en un punto.

Las barras son paralelas. Cuatro y más barras paralelas pueden destruir sólo tres grados de libertad: el desplazamiento progresivo en la dirección de éstas y dos rotaciones alrededor de dos ejes ubicados en el plano perpendicular a las mismas. Los tres grados de libertad restantes, en forma de movimiento de traslación hacia cualquier

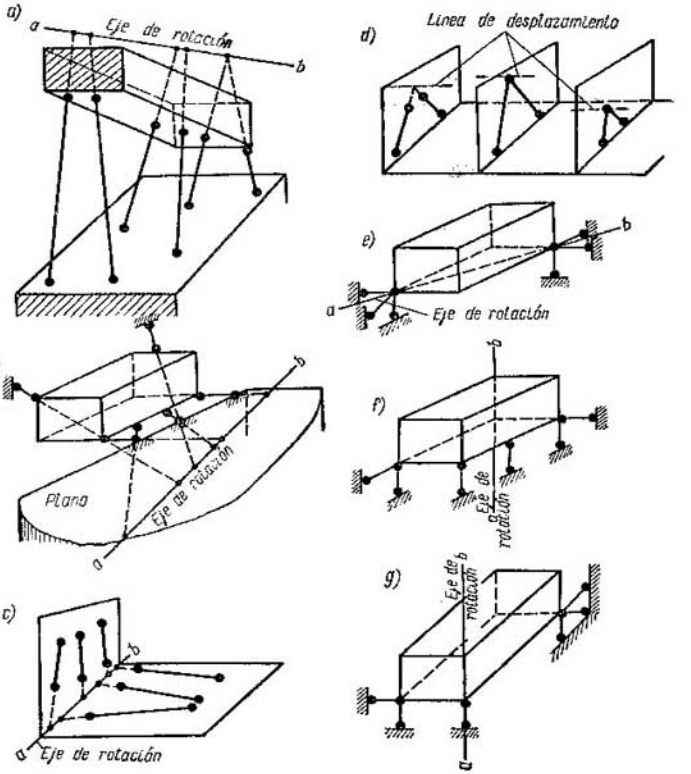


Fig. 244

dirección en el plano perpendicular a las barras y rotación alrededor del eje paralelo a éstas, no pueden ser destruidos por dos vínculos o menos (fig. 244, *f*).

Barras no paralelas. Estas destruyen sólo tres grados de libertad. Las barras restantes (menos de tres) no son suficientes para eliminar otros tres grados de libertad.

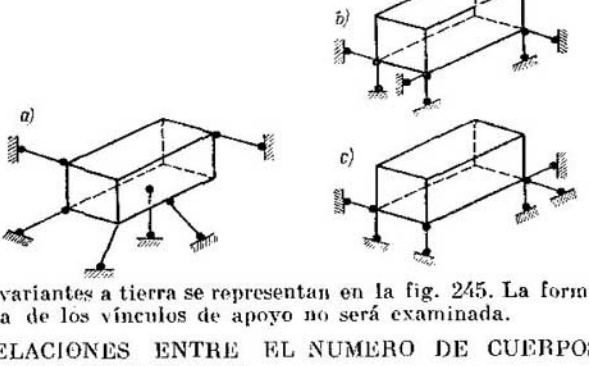
3. Tres barras están en un mismo plano y se cortan en un mismo punto (fig. 244, *g*). Tales barras destruyen sólo dos grados de libertad, precisamente, los desplazamientos progresivos en el plano paralelo al plano de estas barras.

Las otras tres barras son insuficientes para eliminar cuatro grados de libertad.

Si la distribución de las seis barras es correcta las reacciones de los vínculos son estáticamente determinadas.

La fijación de un sistema invariante a tierra se puede efectuar por la regla de unión de dos cuerpos, del sistema y de la tierra. Los vínculos de apoyo, por sus características estáticas y cinemáticas no se diferencian de los descritos más arriba. Las normas de fijación invariante de un cuerpo a tierra son las mismas que para la formación de la unión de dos cuerpos, con todas las limitaciones que allí fueron expuestas. Algunos ejemplos de fijación correcta de

Fig. 245



sistemas invariantes a tierra se representan en la fig. 245. La forma constructiva de los vínculos de apoyo no será examinada.

§ 112. RELACIONES ENTRE EL NUMERO DE CUERPOS Y EL NUMERO DE VINCULOS

1. SISTEMAS LIBRES

Al número de cuerpos que componen el sistema espacial se designa con la letra C. Para generalizar los razonamientos, supongamos que entre estos C cuerpos hay C_1 cuerpos sólo con dos rótulas (barras). Tales cuerpos pueden girar alrededor de un eje que pasa por estas articulaciones, es decir, en ellos se conserva un grado de libertad, que no provoca otra variabilidad del sistema. El número de grados de libertad que se debe eliminar para formar un sistema invariante es:

$$A = 6\,(C-1) - C_1. \tag{12.1}$$

Supongamos que el número de vínculos reducidos a barras simples sea igual a V. Entonces, el número de grados de libertad que puede ser destruido siendo correcta la disposición de los vínculos, es el siguiente:

$$B = V. \tag{12.2}$$

Confrontando A y B podemos escribir

$$A \lessgtr B \quad \text{ó} \quad 6\,(C-1) - C_1 \lessgtr V. \tag{12.3}$$

El signo superior en (12.3) muestra que el sistema no tiene suficiente cantidad de vínculos, por lo que el sistema es *variante*. El

signo medio indica que, para una distribución correcta de los vínculos, el sistema es *invariante e isostático* y el signo inferior, que es *hiperestático*.

2 SISTEMAS FIJOS

Designando como en los sistemas planos, por V_{ap} a la cantidad de vínculos de apoyo (no de apoyos) reducidos, y, teniendo en cuenta que al unir el sistema con la tierra es necesario eliminar seis grados de libertad más del sistema respecto a la tierra, la expresión (12.3) puede ser presentada en la forma:

$$6C - C_1 \gtreqless V + V_{ap}. \qquad (12.4)$$

Todo lo dicho con respecto a los signos en (12.3) sigue siendo válido también aquí.

Subrayamos otra vez que el signo superior en (12.3) y (12.4) muestra que el sistema es variante y, los del medio e inferior, permiten juzgar sobre su invariabilidad sólo cuando es correcta la distribución de los vínculos.

§ 113. ARMADURAS ESPACIALES ARTICULADAS. Se llama armadura articulada al sistema espacial invariante compuesto por barras rectas unidas con rótulas por los extremos. En el caso de carga nodal, en las barras de la armadura articulada surgen sólo fuerzas axiles. La formación de las armaduras simples tiene como

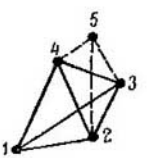


Fig. 246

base el tetraedro (fig. 246). Cada nuevo nudo de la armadura se forma con tres barras no dispuestas en un mismo plano, dado que de otra manera, el nudo de unión tendrá desplazamiento infinitesimal o finito por la dirección perpendicular al plano de las barras. El mismo desplazamiento sufrirá todo nudo compuesto por cualquier número de barras dispuestas en un mismo plano.

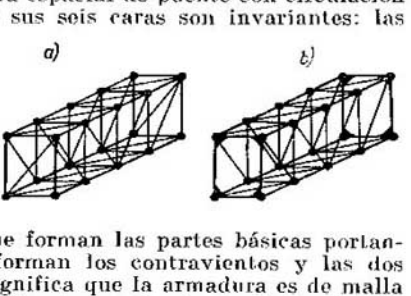
La relación cuantitativa entre las barras de una armadura y sus nudos, se obtiene de la expresión (13.3) y (13.4). Sea que la armadura contiene B barras, N nudos y V_{ap} vínculos de apoyo. Entonces, $C = B$; $C_1 = B$, la cantidad de rótulas en los nudos, teniendo en cuenta que su multiplicidad es igual a $2B - N$ y el número de vínculos es $V = 3(2B - N)$. Colocando estas magnitudes en (12.3) y (12.4) respectivamente, obtenemos

$$3N \lesseqgtr B \quad \text{o} \quad 3N \gtreqless B + V_{ap}. \qquad (12.5)$$

Aquí también los signos superiores indican que la armadura es variante, y los del medio e inferior permiten juzgar sobre su variabilidad sólo si es correcta la distribución de los vínculos.

Entre las armaduras espaciales ocupan un lugar particular las así llamadas de malla, en las cuales todas las barras están ubicadas sólo en los planos de las caras de un poliedro cerrado, formando en cada una de ellas un sistema invariante. Está demostrado que si el poliedro es convexo y todas sus caras invariantes, entonces, también la armadura es invariante. Por este signo es muy sencillo establecer la invariabilidad de la armadura espacial de puente con circulación por arriba (fig. 247, *a*). Todas sus seis caras son invariantes: las

Fig. 247



dos verticales longitudinales que forman las partes básicas portantes; las dos horizontales que forman los contravientos y las dos verticales por las testas. Esto significa que la armadura es de malla y, por consiguiente, invariante. En el caso de circulación por abajo se deberán quitar las barras diagonales de las testas, con lo que la armadura se transforma en variante. La introducción de nuevos vínculos que transforman las caras testales en pórticos estables (fig. 247, *b*) forma nuevamente un sistema invariante hiperestático.

§ 114. DETERMINACION DE LAS REACCIONES DE APOYO. Si el sistema invariante está fijado a tierra sólo por seis barras correctamente distribuidas, entonces, las reacciones de apoyo pueden ser determinadas por las ecuaciones de equilibrio, que pueden ser compuestas de maneras muy diversas. Las dos siguientes son las que se emplean con más frecuencia.

Primera variante de las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum X=0; \qquad \sum Y=0; \qquad \sum Z=0; \qquad \sum M_x=0;$$
$$\sum M_y=0; \qquad \sum M_z=0. \tag{12.6}$$

En este caso, los ejes x, y y z no deben ser paralelos ni estar en un mismo plano, de lo contrario, pueden haber casos cuando se satisfacen las ecuaciones pero no hay equilibrio (fig. 248). Así, por ejemplo, si los ejes están en un mismo plano, las ecuaciones (12.6) se satisfacen en el caso de fuerzas externas, que provocan un par de fuerzas en este mismo plano, pero si además, tres ejes se cruzan en un punto, entonces surge además una fuerza perpendicular al plano y que pasa por el punto de intersección de los ejes (fig. 248, *a*). Si los ejes son paralelos, las ecuaciones (12.6) se satisfacen, pero,

bajo la acción del par dispuesto en el plano que pasa por dos ejes no habrá equilibrio (fig. 248, *b*).

Señalamos que no es imprescindible componer las sumas de los momentos con respecto a los mismos ejes x, y y z sobre los cuales se proyectan las fuerzas. Estas sumas pueden ser compuestas con

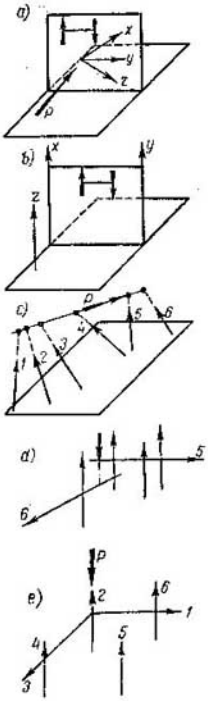


Fig. 248

respecto a otros ejes que satisfagan las exigencias expuestas más arriba.

Segunda variante de la ecuación de equilibrio:

$$\sum M_1 = 0; \quad \sum M_2 = 0; \quad \sum M_3 = 0; \quad \sum M_4 = 0; \quad \sum M_5 = 0; \quad \sum M_6 = 0 \qquad (12.7)$$

con el cumplimiento de las siguientes condiciones:

1) los ejes no deberán cortar una misma recta, de lo contrario bajo la acción de a fuerza P a lo largo de esta recta (fig. 248, *c*) las ecuaciones (12.7) serán satisfechas pero no habrá equilibrio. Por consiguiente, los seis ejes no deberán intersecarse de a tres en un mismo punto y todos ellos no deberán estar sobre uno o dos planos;

2) más de tres ejes no pueden ser paralelos (fig. 248, *d*);

3) si tres ejes se intersecan en un punto, entonces, los tres restantes no deben ser paralelos (fig. 248, *e*).

Pueden haber también otras variantes de ecuaciones de equilibrio.

En los sistemas estáticamente determinados, con respecto a las reacciones de apoyo surgen seis componentes de estas reacciones. Al determinar las mismas es necesario tener en cuenta que, a través de cuatro fuerzas cualesquiera siempre es posible trazar dos rectas que las corten, a las cuales es cómodo tomar o por ejes de momentos al componer las condiciones de equilibrio. En particular, si las cuatro fuerzas de a dos se encuentran en dos planos (fig. 249, *a*), entonces, tales rectas serán: la recta *ab* de intersección de los planos y la *cd* que une los puntos de intersección de las fuerzas coplanares. Si de cuatro fuerzas sólo dos se hallan en un plano, entonces, las dos rectas que intersecan a todas las cuatro fuerzas se encontrarán de la siguiente manera.

Es necesario trazar un plano por la fuerza P_3 y el punto de intersección c de las fuerzas P_1 y P_2 (fig. 249, *b*) y hallar los puntos a y b de intersección de la fuerza P_4 con los dos planos y el de la fuerza P_3 con el primer plano (punto d). Las rectas ad y bc cortan a las cuatro fuerzas.

Las dos ecuaciones de equilibrio en forma de la suma de los momentos con respecto a estas dos rectas que atraviesan a las cuatro fuerzas contienen sólo dos fuerzas incógnitas, de donde éstas pueden ser determinadas.

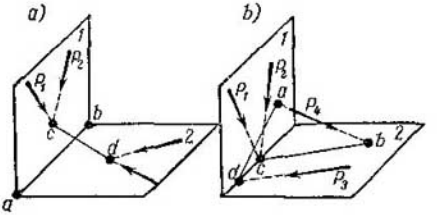


Fig. 249

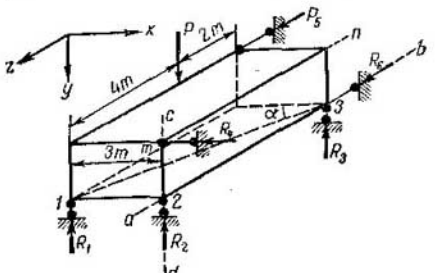


Fig. 250

Ejemplo 27. Determinar las reacciones de apoyo (fig. 250). Componemos as condiciones de equilibrio:

$$\sum M_{c-d} = -R_5 \cdot 3 = 0, \quad \text{de donde} \quad R_5 = 0;$$

$$\sum M_{m-n} = R_1 \cdot 3 - P \cdot 3 = 0, \quad \text{«} \quad \text{»} \quad R_1 = P;$$

$$\sum X = -R_4 = 0, \quad \text{«} \quad \text{»} \quad R_4 = 0;$$

$$\sum Z = R_6 = 0, \quad \text{«} \quad \text{»} \quad R_6 = 0;$$

$$\sum M_{1-2} = P \cdot 4 - R_3 \cdot 6 = 0, \quad \text{«} \quad \text{»} \quad R_3 = \frac{2}{3} P;$$

$$\sum M_{1-3} = -P \cdot 4 \operatorname{sen} \alpha - R_2 \cdot 6 \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad \text{«} \quad \text{»} \quad R_2 = -\frac{2}{3} P.$$

§ 115. DETERMINACION DE LAS REACCIONES DE LOS VINCULOS EN EL CASO DE CARGA FIJA. Los métodos de determinación de las reacciones de los vínculos de los sistemas planos se em-

plean también para determinar las reacciones de los vínculos de los sistemas espaciales. De tal modo, pueden ser utilizados los procedimientos de los cortes simples y conjuntos y de recorte de nudos (para las armaduras) y los métodos de sustitución de vínculos y cinemático. El contenido de estos procedimientos y métodos no varía, pero su empleo en los sistemas espaciales es considerablemente más complejo, por cuanto el equilibrio se examina en el espacio.

El procedimiento de las secciones o cortes simples consiste en que el sistema de área imaginaria, trazado a través de los seis vínculos, se divide en dos partes y se examina el equilibrio de una de ellas. Si el sistema es invariante, entonces, todas la incógnitas pueden ser halladas por seis ecuaciones de equilibrio. En este caso se recomienda componerlas en forma de la suma de los momentos con respecto a dos rectas que corten a cuatro fuerzas. Esto da la posibilidad de determinar de dos ecuaciones las dos incógnitas restantes. En algunos casos también pueden ser empleadas las ecuaciones en forma de la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre un eje elegido de tal modo que se elimina de esta ecuación la mayor cantidad posible de fuerzas incógnitas. Si, al seccionar el sistema en dos partes, el número de fuerzas incógnitas en las barras cortadas es mayor de seis, entonces, su determinación por un solo corte es imposible. En este caso tendremos que recurrir al procedimiento de cortes conjuntos.

El método de sustitución de vínculos consiste en eliminar uno o más de éstos de un sistema complejo e introducirlos en otros lugares del mismo, con el objeto de que el nuevo sistema sea más simple que el dado. Este sistema así transformado se carga con la carga dada y las reacciones incógnitas de los vínculos eliminados. Luego, las reacciones de los vínculos sustituyentes debidas a la carga actuante, y las fuerzas incógnitas se igualan a cero, dado que en realidad tales vínculos no existen.

El método cinemático consiste en que del sistema se elimina un vínculo y su acción sobre el sistema se sustituye por una reacción incógnita. Al sistema variante obtenido se le da un posible desplazamiento infinitesimal, para el cual se compone la ecuación de los trabajos. Por esta expresión se determina la reacción incógnita del vínculo.

El procedimiento de recorte de nudos (para las armaduras) es una variedad del de cortes, en el cual, de la armadura se recorta un nudo. Para las fuerzas convergentes en este nudo se componen sólo tres ecuaciones de equilibrio independientes, con la particularidad de que cada una puede ser o la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje o la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al eje que corte a no menos de dos barras. Si en el nudo convergen sólo tres barras, entonces, las fuerzas longitudinales en cada una de ellas pueden ser determinadas por las ecuaciones de equilibrio de este nudo. En este caso, se recomienda escribirlas en forma de la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje perpendicular al plano de dos barras cualesquiera o en forma de la suma de los momentos

con respecto al eje que las corta, lo que da una ecuación con una incógnita, que es la fuerza longitudinal de la tercera barra.

Es necesario comenzar el cálculo de las armaduras simples con el recorte del nudo que tiene sólo tres barras. En adelante, conviene pasar a aquellos nudos donde no haya más de tres fuerzas longitudinales incógnitas, cada una de las cuales pueda ser determinada de una ecuación de equilibrio. Por el procedimiento de recorte de nudos, hablando en general, puede ser calculada cualquier armadura.

Este procedimiento permite establecer ciertas reglas para determinar las barras que no trabajan:

1) si en un nudo convergen tres barras y en este nudo no hay carga, entonces, las fuerzas axiles en las tres barras son iguales a cero;

2) si en el nudo convergen n barras, de las cuales $n-1$ están sobre un mismo plano, entonces, la fuerza axil en la barra adyacente es igual a cero cuando en el nudo no hay carga o ésta se encuentra en el plano de las demás.

§ 116. CALCULO DE LAS ARMADURAS ESPACIALES POR SU DESCOMPOSICION EN PLANAS. En aquellos casos cuando

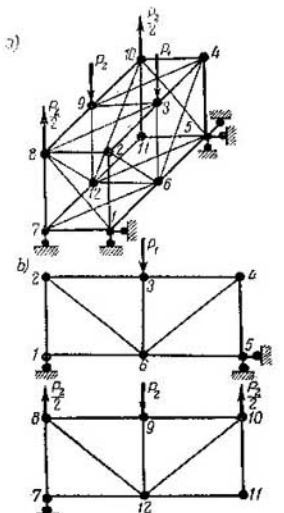


Fig. 251

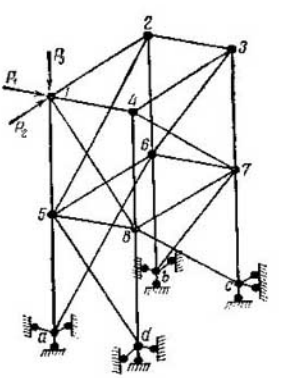


Fig. 252

la armadura espacial está compuesta de armaduras planas invariantes sueltas, es cómodo efectuar su cálculo descomponiéndola en armaduras planas. Esta descomposición se basa en que, si sobre el plano

de una armadura invariante plana, que entra en la composición de la armadura espacial, actúa una carga autoequilibrada o una carga que puede ser equilibrada por los apoyos de esta armadura plana, entonces, las fuerzas axiles surgirán sólo en las barras de esta armadura plana y en las demás barras de la armadura dada serán nulas. Así, por ejemplo, las fuerzas axiles en las barras de la armadura espacial (fig. 250), sólo en las barras de las armaduras verticales planas son diferentes de cero y pueden ser halladas por el cálculo de estas armaduras planas (fig. 251, *b*, *c*). Si la carga sobre la armadura espacial dada es arbitraria, por ejemplo, en forma de la fuerza P en el nudo *1* (fig. 252), entonces, es necesario descomponer esta carga en tres componentes: P_1, P_2 y P_3. La fuerza P_1 origina fuerzas longitudinales en las barras de la armadura *a-5-1-4-8-d* y la P_2 en las *a-5-1-2-6-b*. La fuerza P_3 puede ser referida a cualquiera de estas armaduras. En las barras *a-5* y *5-1* que figuran en la composición de ambas armaduras esta fuerza provoca fuerzas longitudinales que deberán determinarse sumando las fuerzas axiles halladas del cálculo de estas dos armaduras planas.

§ 117. VARIABILIDAD INSTANTANEA DE LOS SISTEMAS ESPACIALES. Si la variabilidad instantánea no se logra establecer basándose en las normas de la formación de los sistemas de barras, entonces, es necesario emplear procedimientos especiales. Estos por su contenido no se diferencian de los que se usaron para hallar la variabilidad instantánea en los sistemas planos. Recordémoslos: el signo analítico general, el procedimiento de la carga nula, el método de sustitución de vínculos y los métodos cinemáticos. Sin embargo, la realización de estos métodos en los sistemas espaciales, como en general todo el cálculo de éstos, es más complicada que en los planos.

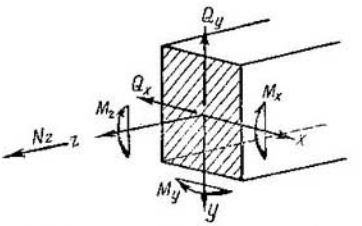
Mostremos cómo por el método de la carga nula se puede juzgar sobre la variabilidad de la armadura representada en la fig. 252, con suficiente número de vínculos para ser invariante. La fuerza longitudinal en la barra *1-4* como concurrente con las demás en el nudo *4*, es igual a cero. Analicemos en forma sucesiva los nudos *1*, *2*, *3* y *4*. Por cuanto en cada uno de estos nudos convergen no más de tres barras y en los nudos no hay carga, entonces, las barras que convergen en dichos nudos no trabajan. Prosiguiendo, tenemos que la fuerza axil en la barra *5-8* es igual a cero, como barra que concurre con las demás en el nudo *8*. A continuación analizamos en forma sucesiva los nudos *5*, *6*, *7* y *8*. Las barras que convergen en estos nudos no trabajan. Por consiguiente, en el caso de carga nula, las fuerzas axiles en todas las barras de la armadura son iguales a cero, lo que significa que ésta es invariante.

§ 118. DESPLAZAMIENTOS DE LOS SISTEMAS ESPACIALES. La determinación de los desplazamientos en los sistemas espaciales también se basa en los mismos principios que la determinación de

éstos en los sistemas planos. Pero, por cuanto en los sistemas espaciales las fuerzas internas (fig. 253) tienen seis componentes, las M_x, M_y, M_z, Q_x, Q_y, N_z, las fórmulas serán otras. Presentemos solamente la fórmula de los desplazamientos debidos a la carga en los sistemas de barras rectas:

$$\Delta_{km} = \sum \int \overline{M}_{xk} \frac{M_{xm}}{EJ_x} ds + \sum \int \overline{M}_{yk} \frac{M_{ym}}{EJ_y} ds + \\ + \sum \int \overline{M}_{zk} \frac{M_{zm}}{GT} ds + \sum \int \overline{N}_k \frac{N_m}{EF} ds + \\ + \sum \int \mu_x \overline{Q}_{xk} \frac{Q_{xm} ds}{GF} + \sum \int \mu_y \overline{Q}_{yk} \frac{Q_{ym}}{GF} ds, \qquad (12.8)$$

Fig. 253



donde GT es la rigidez a la torsión. La magnitud T es: para el cuadrado $T \approx 0{,}1426\ a^4$;

para el rectángulo angosto siendo $a > b$ $T \approx \frac{b^3}{3}$ $(a - 0{,}63b)$;

para el círculo $T = \frac{\pi r^4}{2}$;

para las secciones de pared delgada abiertas, compuestas de rectángulos angostos, siendo $a_i > b_i$ $T \approx \frac{1}{3} \sum b_i^3\ a_i$.

Para las armaduras articuladas la fórmula de los desplazamientos conserva su aspecto anterior (11.39). Todos los teoremas sobre el trabajo y los desplazamientos expuestos para los sistemas planos también son válidos para los espaciales.

Estimado lector:

La Editorial le quedará muy agradecida, si Ud nos manda su opinión acerca del libro que le ofrecemos, así como de la traducción y presentación del mismo.

Le agradeceremos también cualquier otra sugerencia respecto a la edición de libros que le interesan.

Dirija, por favor, su opinión y sugerencia a la Editorial Mir:

Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, Moscú, 129820, I-110, URSS.

SERA PUBLICADO

«MECANICA DE CONSTRUCCION EN EJEMPLOS Y PROBLEMAS»

escrito por Kiseliov V. A. y otros

* * *

El libro «La mecánica en ejemplos y problemas» representa en sí un manual de problemas y ejercicios, cuyos ejemplos y respuestas han sido detalladamente elaborados. Esta edición tiene una serie de ejemplos en los diferentes temas del curso general de mecánica de construcción (partes primera y segunda) para las especialidades «puentes y túneles», «construcción de aeródromos» y «carreteras» de los centros de enseñanza superior. Se han introducido los fundamentos del cálculo de sistemas hiperestáticos utilizando cálculo de matrices y algunos elementos de programación, así como también, el «cálculo para el estado deformado».

El libro contiene 21 capítulos. Los capítulos 1-9 se dedican al cálculo de los sistemas isostáticos (vigas, pórticos planos, armaduras de viga articuladas, sistemas triarticulados, sistemas combinados planos isostáticos, etc.) donde se examinan también, ejemplos de cálculo bajo cargas límites, de determinación de desplazamientos y de sistemas espaciales. En los capítulos 10-13 se examinan ejemplos de cálculo de pórticos, vigas, arcos y armaduras hiperestáticas por el método de fuerzas. En los 14 y 15, se dan ejemplos de cálculo por el método de desplazamientos y los métodos mixto y combinado. En el capítulo 16 se expone el cálculo de pórticos complejos por el método de distribución de momentos. En los capítulos 17 y 18 se dan ejemplos del cálculo de sistemas hiperestáticos sometidos a cargas límites y de sistemas hiperestáticos espaciales. En los últimos tres capítulos se exponen métodos de cálculo de matrices, bases de programación y el cálculo para el estado deformado.

Cada vez que es necesario, se dan breves informaciones teóricas y fórmulas, indispensables para el análisis de los ejemplos y la resolución de los problemas.

El libro, como manual, está destinado a los estudiantes del ramo de la construcción en los centros de enseñanza superior y de las facultades de vialidad, se ha incorporado a los programas de «mecánica de construcción» para la especialidad de construcciones civiles en las escuelas superiores y puede ser utilizado por los estudiantes de los centros de estudios superiores de transporte.